

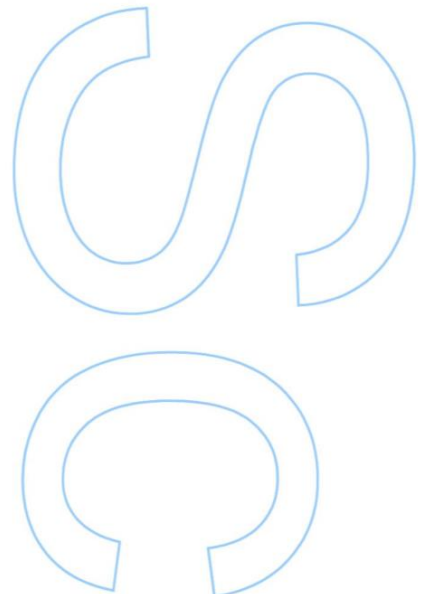
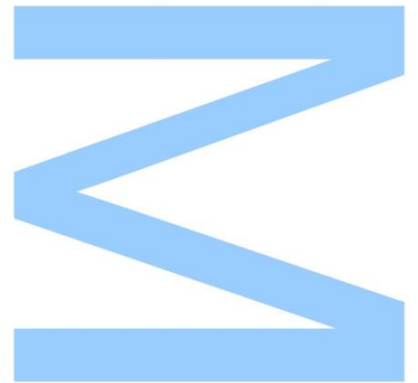
# Modelos para Seleção de Carteiras de Investimento

José Pedro Pereira Ribeiro

Engenharia Matemática  
Departamento de Matemática  
Ano 2017

**Orientador**

Maria do Carmo Miranda Guedes, Professor Auxiliar Convidado,  
Faculdade de Ciências Universidade do Porto

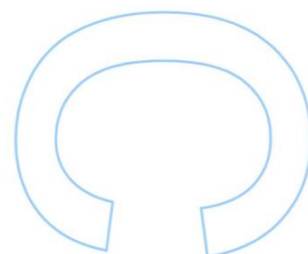
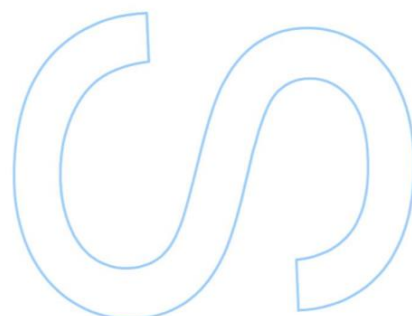
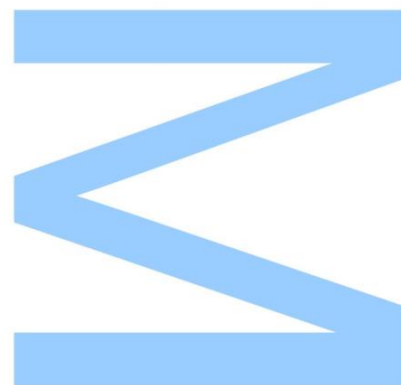




Todas as correções determinadas  
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_





## Agradecimentos

Agradeço à professora Maria do Carmo Guedes pela paciência que teve, pelos conselhos, pelos ralhetes e pelo que me ensinou.

Agradeço à minha irmã, Rita, e à minha mãe, Bertilde, pelo apoio e também aos meus tios e primos.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, que me acompanharam mais de perto, Miguel, Bruno, Anaísa, Mário, Lúcia, Elisa, Rita, Carla Azevedo, Carla Teixeira, Sara, Guilherme, Marta, Marcelo e Catarina.

## Resumo

Ao usar conhecimentos de Matemática Financeira em combinação com conhecimentos de Programação Matemática, aparecem formas de definir o problema da escolha de carteiras de investimento como um modelo de Programação Matemática.

Neste trabalho, descrevem-se quatro modelos para obter carteiras de investimento otimizadas: o modelo de Markowitz, o modelo de Konno e outros dois que são formulações robustas do modelo de Markowitz. Todos estes modelos baseiam-se em minimizar uma medida de risco, ou equivalente, de modo a que sejam satisfeitas condições sobre o retorno, direta ou indiretamente, e sobre o montante de investimento. Todos os modelos referidos foram resolvidos utilizando até três *software* diferentes desde que o escolhido fosse capaz disso; e finalmente, compararam-se resultados sobre o retorno das carteiras obtidas de cada modelo com objectivo de identificar algum comportamento interessante.

**Palavras-Chave.** Carteira de Investimento, retorno, risco, solução ótima, solução robusta.

## Abstract

When using knowledge from Financial Mathematics in combination with knowledge from Mathematical Programming, ways to define the portfolio selection problem, show up as a Mathematical Programming model.

In this work, four models to get an optimal portfolio are described: Markowitz's model, Konno's model and another two models that are robust formulations of the Markowitz's model. All of these models are based upon minimizing a risk measure, or equivalently, in such a way that conditions over the return, directly or indirectly, and over the amount to invest are satisfied. All the referred models were solved using up to three softwares, as long as they were capable of such; finally, results on the return of the portfolios obtained from each model were compared, in order to identify some interesting behaviour.

**Keywords.** Investment portfolio, return, risk, optimal solution, robust solution.

# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>1</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>2</b>
<b>1 Introdução</b>	
<b>2 Elementos de Matemática Financeira</b>	
2.1 Juro e Taxas de Juro . . . . .	5
2.2 Estrutura de Capital de uma Empresa . . . . .	7
2.3 Carteiras de Investimento . . . . .	7
2.4 Retorno . . . . .	7
<b>3 Elementos de Programação Matemática</b>	
3.1 Condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de um problema de Programação Matemática . . . . .	10
3.2 Interpretação do multiplicadores de Lagrange . . . . .	11
3.3 Breve descrição de algoritmos para resolução de problemas lineares e quadráticos	12
<b>4 Modelos para obter Carteiras de Investimento Otimizadas</b>	
4.1 Modelo de Markowitz . . . . .	15
4.2 Modelo de Konno . . . . .	15
4.3 Modelo de Markowitz Robusto . . . . .	17
4.4 Modelo de Bertsimas e Sim . . . . .	21
<b>5 Aplicação Computacional</b>	
5.1 Dados . . . . .	23
5.2 <i>Software</i> . . . . .	23
5.3 Resultados e Comparações . . . . .	24
<b>6 Conclusão</b>	
<b>7 Referências</b>	
7.1 Artigos e livros . . . . .	30
7.2 <i>Sites</i> . . . . .	31
<b>A Anexos</b>	
A.1 Variantes do Modelo de Markowitz . . . . .	32
A.2 Instruções LINGO . . . . .	35
A.3 Instruções Matlab . . . . .	37
A.4 Excerto dos Dados Usados . . . . .	43
A.5 Outros Resultados da Aplicação Computacional . . . . .	44

## Lista de Tabelas

1	Retornos dos primeiros nove meses de 2015, à sexta-feira . . . . .	43
2	Retornos dos últimos três meses de 2015, à sexta-feira . . . . .	44



## Lista de Figuras

1	Retornos das carteiras obtidas dos dados diários do primeiro semestre de 2015 no segundo semestre de 2015. . . . .	25
2	Retornos das carteiras obtidas dos dados diários dos primeiros nove meses de 2015 no último trimestre de 2015. . . . .	25
3	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2014 em 2015. . . . .	26
4	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2013 em 2015. . . . .	26
5	Retornos das carteiras obtidas dos dados diários e semanais (sextas-feiras) dos anos de 2013/2014 em 2015. . . . .	27
6	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012 em 2015. . . . .	44
7	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011 em 2015. . . . .	45
8	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010 em 2015. . . . .	45
9	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2013 em 2014. . . . .	46
10	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012 em 2014. . . . .	46
11	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011 em 2014. . . . .	47
12	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010 em 2014. . . . .	47
13	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012/2013 em 2014. . . . .	48
14	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012 em 2013. . . . .	48
15	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011 em 2012. . . . .	49
16	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010 em 2011. . . . .	49
17	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010/2011 em 2012. . . . .	50
18	Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011/2012 em 2013. . . . .	50

# 1 Introdução

Todos os investidores enfrentam o dilema de retorno contra risco, ou seja, normalmente, um investimento numa carteira que prometa produzir um retorno grande tem associado um risco elevado, por outro lado, um investimento que origine um retorno mais baixo, será menos arriscado. Portanto, o investidor tem que decidir em que activos deve investir, ou seja, quais deverão fazer parte da sua carteira, depois quanto investir em cada um desses e, finalmente, quando investir.

Para todas estas questões, existem duas opções: uma é o investidor seguir o seu instinto. Outra é procurar algum instrumento que ajude na sua decisão. Até aos dias de hoje, foram realizados muitos estudos para desenvolver modelos que ajudam a decidir e que trazem palpites sobre os possíveis resultados do investimento. Também importante para dar resposta ao dilema de retorno contra risco é definir estes conceitos, de retorno e risco, de forma adequada.

Markowitz define, para os seus modelos, o retorno de uma carteira como a média do seu retorno [3] e Konno, também, usa essa mesma definição para o seu modelo [9]. Para a medida de risco, Markowitz sugeriu que fosse a variância do retorno da carteira [14] e Konno sugere a média absoluta dos desvios [9]. Resumindo, o problema da escolha de uma carteira de investimento é alocar o capital para investimento em activos com o objectivo de minimizar o risco e de maneira a obter um certo retorno.

Os problemas de otimização, em particular estes problemas da escolha de carteiras de investimento, complicam-se bastante quer em termos teóricos, quer em termos computacionais, quando se tenta torná-los mais próximos da realidade. Uma forma de aproximar estes problemas à realidade é considerar que a informação a que se tem acesso é incerta, quer isto dizer que não há garantia de que um valor que se verificou hoje, se venha a verificar amanhã, ou daqui a uma semana, por exemplo. No contexto de carteiras de investimento, pode-se considerar a existência de factores que influenciam o mercado financeiro, ou a variação do valor do dinheiro com o passar do tempo e de alguma forma, incluir estes no modelo. A resolução computacional de um destes modelos pode não ser fácil e pode não existir ou estar em desenvolvimento algum algoritmo que resolva estes problemas de forma eficiente. No modelo de Markowitz e no modelo de Konno considera-se que a informação está completa. Mas na verdade, como foi dito há pouco, não se tem conhecimento garantido dos valores futuros e aqui surge uma nova questão: a solução ótima de um problema de otimização é sensível a oscilações nos valores dos parâmetros, o que significa que mesmo alterando-se ligeiramente o valor de um ou mais parâmetros no problema original, há restrições que deixam de ser satisfeitas e, portanto, a solução deixa de ser viável, logo deixa de ser ótima. Aparece, assim, o desafio de desenvolver modelos cuja solução ótima não seja afectada pela incerteza nos dados, daqui os nomes de modelo robusto e solução robusta. Soyster [13] foi o primeiro a desenvolver métodos para contornar este problema, mais tarde, Ben-Tal e Nemirovski [1], [2], [3] e El-Ghaoui e Lebret [6], deram o seu contributo para a teoria de otimização robusta. Por volta desta altura, Bertsimas e Sim [4] desenvolvem uma forma geral de escrever um problema de otimização na forma robusta, como um problema linear. Os objectivos neste trabalho são estudar modelos de otimização para o caso particular da escolha de carteiras de investimento, resolvê-los com o auxílio de *software* e comparar os resultados obtidos de cada modelo.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo são referidos alguns

conceitos de Matemática Financeira, de destacar são o juro, taxa de juro e retorno. No segundo capítulo, apresenta-se alguma teoria de Programação Matemática que foi considerada relevante para o trabalho. No terceiro capítulo, são descritos quatro modelos para obter carteiras de investimento otimizadas. No quinto capítulo, expõem-se alguns resultados da aplicação computacional dos modelos e, finalmente, no sexto são feitos alguns comentários finais.

## 2 Elementos de Matemática Financeira

Em Matemática Financeira, os dois conceitos mais importantes são juros e taxas de juro. Quando se faz um depósito a prazo no banco, por exemplo, o que acontece é a transformação do capital inicial em capital e juros ao longo do prazo definido. A isto chama-se capitalização.

### 2.1 Juro e Taxas de Juro

Nos processos de capitalização, como o do exemplo anterior, existem três regras, as chamadas regras de ouro da Matemática Financeira, que têm de ser respeitadas [5]:

- o juro é igual a 0 se e só se não há capital ou ainda se está no início da capitalização;
- operações entre capitais só são possíveis se os mesmos dizem respeito ao mesmo período de tempo;
- seja  $r_k$  a taxa de juro no período  $k$ . O juro no período  $k$ ,  $j_k$ , é dado pelo produto de  $r_k$  e o capital no período anterior,  $C_{k-1}$ :

$$j_k = r_k C_{k-1}$$

Tendo isto em conta, pode-se concluir que o valor do dinheiro, ou capital, varia com o passar do tempo e, assim, uma taxa juro serve como uma taxa de conversão entre valor do dinheiro hoje e o valor do dinheiro amanhã, ou vice-versa.

No que toca a taxas de juro, é importante saber o regime da taxa. Se se trata de uma situação de assincronismo, encontrar uma taxa equivalente; se o problema for partir do fim do prazo para o dia do depósito, qual o desconto ou actualização que deve ser aplicado e, finalmente, o tipo de taxa.

Os regimes de taxa de juro são os seguintes: regime simples, onde o capital acumulado ao fim de  $n$  períodos de tempo é dado por:

$$C_n = C_0(1 + nr)$$

e regime composto, onde o capital acumulado ao fim de  $n$  períodos de tempo,  $C_n$ , é dado por:

$$C_n = C_0 \prod_{k=1}^n (1 + r_k)$$

Há ainda um outro regime: o regime "dito" simples em que o capital acumulado ao fim de  $n$  períodos de tempo é dado por:

$$C_n = C_0 \sum_{k=1}^n (1 + r_k)$$

Em particular, se a taxa de juro  $r$  é constante em todos os períodos de tempo, tem-se:

$$C_n = C_0(1 + nr)$$

que coincide, com a definição de regime simples.

As taxas de juro vêm em três tipos:

- real, ou deflacionado, ou a preços constantes, à taxa  $r$ ;
- compensatório, à taxa de inflação  $i$ ;
- nominal, ou aparente, ou a preços correntes, à taxa  $r'$ .

A capitalização sob a taxa nominal de um montante  $C_0$  durante um período tem dois crescimentos: um devido à taxa de inflação e outro devido à taxa de juro real. Daqui, resulta a relação entre as três taxas:

$$C_0(1 + r) = C_0(1 + i)(1 + r') \Leftrightarrow r = r' + i + r'i$$

Para  $n$  períodos tem-se:

$$C_0(1 + r)^n = C_0(1 + i)^n(1 + r')^n$$

A situação de assicronismo pode acontecer de duas formas:

- o período correspondente à taxa de juro não coincide com o período de capitalização;
- o processo dura um número não inteiro de períodos de capitalização.

Esta duas situações podem acontecer em simultâneo.

Para resolver este problema, de usar a taxa de juro adequada, aplica-se uma taxa equivalente se a taxa de juro for efectiva, ou aplica-se uma taxa proporcional se a taxa de juro for nominal.

Quando se aplica uma taxa de equivalência deve-se poder verificar o seguinte: taxas equivalentes aplicadas ao mesmo capital inicial, durante o mesmo prazo, devem gerar o mesmo capital acumulado, independentemente do período de referência das taxas ou do período de capitalização.

Seja  $r$  uma taxa de juro,  $x$  o período de referência de  $r$ , em unidades elementares de tempo (exemplo: dia) e  $u$  uma taxa de juro por unidades de  $x$ .

Atendendo à regra enunciada antes,  $u$  e  $r$  são taxas de juro equivalentes se:

$$C_0(1 + u)^k = C_0(1 + r) \Leftrightarrow 1 + u = (1 + r)^{1/x}$$

Seja  $r'$  outra taxa de juro, com período de  $x'$  unidades de tempo. Da mesma forma:

$$1 + u = (1 + r')^{1/x'}$$

A relação de equivalência entre  $r$  e  $r'$  é dada por:

$$1 + r' = (1 + r)^{x'/x}$$

A relação de proporção entre  $r$  e  $r'$  dada por:

$$r' = r \frac{x'}{x}$$

Quanto a actualização ou desconto, o que acontece é o seguinte: no instante  $n$ , último instante do período, está disponível o capital  $C_n$ , qual é o capital que lhe equivale num instante precedente  $m$ ? Durante todo o processo, é assumido um regime de juro composto. A esta capitalização é que se chama actualização ou desconto.

Fazendo  $m = 0$ , o problema é saber qual é o capital inicial sabendo qual é o capital final:

$$C_0 = C_n(1 + r)^{-n}$$

Em qualquer outro momento,  $m \neq 0$ , o desconto é dado por:

$$C_m = C_n(1 + r)^{-n+m}$$

$C_m$  é, então, o capital do momento  $n$  para um momento  $m$ , qualquer.

## 2.2 Estrutura de Capital de uma Empresa

A estrutura de capital numa empresa divide-se em duas categorias: capital próprio, que pertence a sócios e accionistas da empresa, e capital de terceiros, que corresponde a dívidas e fontes de financiamento.

## 2.3 Carteiras de Investimento

Uma carteira de investimento consiste na alocação de capital num conjunto de empresas ou activos de interesse para o investidor. Em particular, quando o investidor compra acções de uma empresa, está a assumir posição como accionista, e portanto, fica detentor de capital próprio dessa empresa. A notação a usar para carteira de investimento será  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , onde  $x_i, i = 1, \dots, n$  é a percentagem de capital disponível para investimento ou quantitativo investido na empresa ou activo  $i$ . Diz-se que a carteira de investimento  $\mathbf{x}$  define a posição do investidor no mercado financeiro.

## 2.4 Retorno

Sejam  $v_{it}$  o valor de uma unidade do activo  $i$ , no instante  $t$ . O retorno de uma unidade do activo  $i$  no instante  $t$ ,  $r_{it}$ , é dado por:

$$r_{it} = \frac{v_{it} - v_{it-1}}{v_{it-1}}, \quad t = 1, \dots, T$$

onde  $v_{it-1}$  o valor de uma unidade do activo no instante  $t - 1$ .

Em alguns casos, pode ser conveniente, em vez do retorno, usar o logaritmo do retorno da seguinte forma:

$$\ln(1 + r_{it}) = \ln\left(1 + \frac{v_{it+1} - v_{it}}{v_{it}}\right) = \ln\left(1 + \frac{v_{it+1}}{v_{it}} - 1\right) = \ln\left(\frac{v_{it+1}}{v_{it}}\right) = \ln(v_{it+1}) - \ln(v_{it})$$

Em geral,  $\ln(r_{it}) \approx r_{it}$ .

É comum assumir que, os retornos de um activo em cada instante seguem uma distribuição normal. Sejam  $r_1, \dots, r_T$  os retornos desse activo. Aplicando o logaritmo a esses retornos da seguinte forma:

$$\ln((1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_T)) = \ln(1 + r_1) + \ln(1 + r_2) + \dots + \ln(1 + r_T)$$

Se cada  $\ln(1 + r_t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , tiver distribuição normal, então acima tem-se a soma de distribuições normais, que é também uma distribuição normal. Então, tem-se uma distribuição normal do logaritmo do retorno, para qualquer instante da janela de tempo considerada.

### 3 Elementos de Programação Matemática

Programação Matemática é o estudo de um problema de determinação de um máximo ou mínimo de uma função de várias variáveis de modo a que sejam cumpridas certas restrições para essas variáveis. Os problemas de Programação Matemática aparecem em diversos sectores da actividade humana: planeamento económico, planeamento de produção, controlo de *stock*, etc. Estes problemas são tanto maiores quanto maior for o número de restrições e variáveis.

Um problema de Programação Matemática tem a forma geral:

$$\max\{f(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in S \subset \mathbb{R}^n\}$$

onde  $S$  é a região admissível e é determinada por um conjunto de restrições, por exemplo:

$$S = \{\mathbf{x}|g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m\}$$

Existem problemas lineares e não lineares, de entre os quais serão abordados o problema de Programação Linear, o problema de Programação Quadrática e ainda o problema Cone de Segunda Ordem (SOCP).

Quando as funções  $f$  e  $g_i$  são todas lineares, tem-se um problema de Programação Linear. A forma geral de um problema de Programação Linear é:

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$$

Destes os mais comuns são:

- se for exigido que  $\mathbf{x}$  tome valores inteiros, tem-se um problema de Programação Inteira e escreve-se, em geral:

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0 \text{ e inteiro}\}$$

- Programação 0-1 ou Booleana se é exigido que  $\mathbf{x}$  tome os valores 0 ou 1, com a formulação geral:

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, x_j = 0 \text{ ou } 1 \text{ para } j = 1, \dots, n\}$$

- Programação Inteira Mista se algumas variáveis de estudo são inteiras e as restantes não têm, necessariamente, de ser inteiras, por exemplo:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \mathbf{p}^T \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{y} \\ &\text{s. a } \mathbf{Ax} + \mathbf{Qy} \leq \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x} \geq 0 \\ &\quad \mathbf{y} \geq 0 \text{ e inteiro} \end{aligned}$$

Neste exemplo,  $\mathbf{x}$  pode tomar qualquer valor maior ou igual a 0 e  $\mathbf{y}$  tem que ser inteiro e maior ou igual a 0. Existem ainda, problemas de programação discreta, que surgem se  $f$  e  $g_i$  são descontínuas ou algumas das variáveis só tomar valores discretos. Por último, supondo



que os coeficientes  $c_j$ ,  $b_j$  ou  $a_{ij}$  em vez de serem valores fixos, são dados por uma distribuição de probabilidade conhecida, tem-se então um problema de Programação Estocástica. O problema geral de Programação Quadrática pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \max z &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a } \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz  $m \times n$ ,  $\mathbf{D}$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ ,  $\mathbf{b}$  é um vector de dimensão  $m$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{c}$  têm dimensão  $n$ .

Por último, define-se o Problema Cone de Segunda Ordem (SOCP) [10], que é um problema de otimização com a forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f^T x \\ \text{s.a } \|A_i x + b_i\| &\leq c_i^T + d_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vector das variáveis de decisão e os parâmetros do problema são  $f \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}^n$  e  $d_i \in \mathbb{R}$  e a norma na restrição, é a norma euclideana. Existe um conceito importante em Programação Matemática: o conceito de dual de um problema. Dado um problema de Programação Matemática, designado por primal, a partir deste pode-se escrever, um outro problema, o seu dual. O problema primal e o seu dual formam o que se chama de par típico. Para o caso do problema linear é, relativamente, directa a formulação do seu dual. Seja o seguinte problema linear o problema primal

$$\max z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{D} \mathbf{x} \leq \mathbf{d}, \mathbf{x} \geq 0$$

o correspondente dual pode ser escrito como

$$\min Z = \mathbf{d}^T \mathbf{w}, \quad \mathbf{D}^T \mathbf{w} \geq \mathbf{c}, \mathbf{w} \geq 0$$

Os pares típicos são úteis, pois em alguns casos o problema dual pode ter uma resolução mais fácil que o primal e também existem algoritmos que se baseam na teoria da dualidade.

### 3.1 Condições necessárias e suficientes para a existência de uma solução de um problema de Programação Matemática

Considere-se o problema

$$\begin{aligned} \text{maximizar } z &= f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a } g_i(\mathbf{x}) &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $f$ ,  $g_i$  são de classe  $C^1$  e, em geral,  $m < n$  e supondo que as restrições são independentes. Seja  $G = \|\partial g_i / \partial x_j\|$  a matriz formada pelas derivadas  $\partial g_i / \partial x_j$ . A função lagrangeana, neste caso, é:

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(\mathbf{x})] \tag{2}$$

onde  $\lambda_i$  são os multiplicadores de Lagrange. Igualando a 0 as derivadas parciais desta função obtêm-se as condições para que  $f(\mathbf{x})$  tenha um óptimo local em  $\mathbf{x}_0$ , sujeito a  $g_i(\mathbf{x}) = b_i$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_j} &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} &= g_i(\mathbf{x}_0) - b_i = 0, \quad j = 1, \dots, m\end{aligned}\tag{3}$$

Para qualquer  $\mathbf{x}_0$  solução de (3) os multiplicadores de Lagrange são determinados de forma única se a característica de  $G$ ,  $\text{car}(G) = m$  em  $\mathbf{x}_0$ .

Por outro lado, se  $\text{car}(G) \neq m$  em  $\mathbf{x}_0$  não é garantido que uma solução  $\mathbf{x}_0$  de (1) satisfaça as condições (3).

Sejam  $f$  e  $g_i$  funções de classe  $C^2$ . Uma condição suficiente para a existência de um máximo local ligado da função  $f(\mathbf{x})$  é  $d^2f < 0$  no ponto ótimo, sujeito a  $dg_i = 0$  e  $d^2g_i = 0$  com  $i = 1, \dots, m$ .

$$\begin{aligned}df &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \\ d^2f &= d\mathbf{x}^T H_f(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x} + [\nabla f(\mathbf{x}_0)]^T d^2\mathbf{x} < 0\end{aligned}\tag{4}$$

onde  $H_f(\mathbf{x})$  é a matriz hessiana de  $f$ . O vector  $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)^T$  deve satisfazer

$$dg_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) dx_j = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

E também deve satisfazer

$$d^2g_i = d\mathbf{x}^T H_{g_i}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x} + [\nabla g_i(\mathbf{x}_0)]^T d^2\mathbf{x} = 0$$

Uma condição suficiente alternativa para um máximo local de  $f$ , pode ser obtida usando a matriz hessiana da função lagrangeana.

## 3.2 Interpretação dos multiplicadores de Lagrange

Novamente, é procurado o ótimo global de  $z = f(\mathbf{x})$  sujeito a  $g_i(\mathbf{x}) = b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Sejam  $x^*$  a solução deste problema,  $\lambda^*$  o vector dos multiplicadores de Lagrange associados a  $x^*$ . Em geral, a solução e os correspondentes multiplicadores de Lagrange dependem dos termos independentes  $b_i$ .

Supondo que cada  $x_j^*$  e  $\lambda_j^*$  é uma função contínua e diferenciável de  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$  numa vizinhança de  $\mathbf{b}_0$ , derivando  $z^* = f(\mathbf{x}^*)$  em relação aos  $b_i$  em pontos de  $\mathbf{b}$  que pertencem a essa vizinhança de  $\mathbf{b}_0$  tem-se:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i}\tag{5}$$

Como  $g_k(\mathbf{x}^*) = b_k$ ,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = \delta_{ik}\tag{6}$$

o que é o mesmo que

$$\delta_{ik} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_j^*} \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} = 0 \quad (7)$$

Agora, multiplicando (7) por  $\lambda_k^*$  e somando sobre  $k$  e somando a (5) fica:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \delta_{ik} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_j^*} - \sum_{k=1}^m \lambda_k^* \frac{\partial g_k}{\partial x_j^*} \right) \frac{\partial x_j^*}{\partial b_i} \quad (8)$$

Como  $\mathbf{x}^*$  e  $\lambda^*$  devem satisfazer as condições (3) conclui-se que:

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^*$$

Isto significa que a derivada parcial do ótimo global em relação a  $b_i$  é o multiplicador de Lagrange  $\lambda_i^*$  calculado em  $\mathbf{b}$ .

Na maioria dos casos,  $z$  será um lucro ou um custo,  $b_i$  será o número de unidades de algum recurso. Neste contexto,  $\lambda_i^*$  é medido em unidades monetárias por unidade do recurso  $i$ , por outras palavras  $\lambda_i^*$  pode ser visto como um preço ou valor por unidade do recurso  $i$ . Ou ainda,  $\lambda_i^*$  dá a alteração do lucro máximo, ou custo mínimo, se a quantidade do recurso  $i$  aumentar uma unidade.

### 3.3 Breve descrição de algoritmos para resolução de problemas lineares e quadráticos

Existem algoritmos importantes para resolução de problemas lineares, entre os quais, o método simplex e método simplex dual. Para resolver problemas quadráticos o método mais comum é alguma variação do método do ponto interior. Estes terão, de seguida uma breve descrição.

#### Método Simplex.

Considere-se o problema linear na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. a } \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz com  $m$  linhas,  $n$  colunas,  $m \leq n$ , e os vectores  $\mathbf{b}, \mathbf{c}$  e  $\mathbf{x}$  têm dimensão apropriada para o problema ser válido.

Seja  $\mathbf{B}$  a matriz formada por  $m$  colunas de  $\mathbf{A}$  linearmente independentes. As colunas  $b_i (i = 1, \dots, m)$  desta matriz  $\mathbf{B}$  constituem uma base de  $E^m$ . Então, qualquer coluna  $a_j$  da matriz  $\mathbf{A}$  pode ser escrita como combinação linear de  $b_i$ . Sejam  $y_{ij}$  os coeficientes dessa combinação linear e  $y_j$ , o vector dos coeficientes  $\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{mj})$ . Escreve-se então:

$$a_j = y_{1j}b_1 + \dots + y_{mj}b_m = \sum_{i=1}^m y_{ij}b_i = \mathbf{B}y_j$$

Assim pode-se escrever  $\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ . Seja  $\mathbf{N}$  a matriz  $m \times (n - m)$  formadas pelas colunas de  $\mathbf{A}$  que não estão em  $\mathbf{B}$ . Decompondo de forma apropriada o vector  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$  pode escrever-se como:

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

Fazendo  $\mathbf{x}_N = 0$ :

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} \iff \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Se  $\mathbf{x}_B \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , a base  $\mathbf{B}$  é admissível assim como a solução básica a ela associada. O respectivo valor da função objectivo  $z$  é dado por:

$$z = \sum_{j=1}^n c_j x_j = c_B^T \mathbf{x}_B + c_N^T \mathbf{x}_N = c_B^T \mathbf{x}_B$$

Pode-se ainda definir o valor  $z_j$  como sendo uma combinação linear de  $c_{B_i}$ , onde os coeficientes da combinação são os  $y_{ij}$ :

$$z_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} c_{B_i} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_j$$

O método simplex é um método iterativo cujos passos são os seguintes: conhecidos uma solução básica admissível associada a uma base  $\mathbf{B}$ ,  $z$  o valor da função objectivo e  $z_j - c_j$  e  $\mathbf{y}_j$  tal que, para cada coluna  $\mathbf{a}_j$  se tem  $\mathbf{a}_j = \mathbf{B}\mathbf{y}_j$ :

1. observar  $z_j - c_j$ :

- todos os  $z_j - c_j \geq 0$ : a solução básica admissível é ótima;
- um ou mais dos  $z_j - c_j < 0$ , e para pelo menos um  $\mathbf{a}_k$  para o qual  $z_k - c_k < 0$ , todos os  $y_{ik} \leq 0$ : existe uma solução não limitada;
- um ou mais  $z_j - c_j < 0$  e cada um deles tem  $y_{ij} > 0$  para pelo menos um  $i$ : escolher um destes vectores, seja  $\mathbf{a}_k$ , para inserir na base

2. Quando se verifica este último ponto, determinar o vector a ser retirado da base, usando o critério:

$$\frac{x_{B_i}}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\}$$

A coluna  $\mathbf{b}_r$  da base deve ser substituída por  $\mathbf{a}_k$ .

3. Calcular  $\hat{\mathbf{x}}_B$ ,  $\hat{z}$ ,  $\hat{y}_j$ ,  $\hat{z}_j - c_j$  para todo  $j$ . Voltar ao passo 1. As expressões para calcular estes valores são:

$$\hat{\mathbf{x}}_B : \begin{cases} \hat{x}_{B_i} = x_{B_i} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} x_{B_r}, & i \neq r \\ \hat{x}_{B_r} = \frac{1}{y_{rk}} x_{B_r} \end{cases}$$

A expressão para  $\hat{z}$  é:

$$\hat{z} = z + \frac{x_{B_r}}{y_{rk}} (c_k - z_k)$$

Substituindo  $\mathbf{b}_r$  por  $\mathbf{a}_k$  obtém-se:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} \mathbf{b}_i = \sum_{i=1, i \neq r}^m \left( y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \right) \mathbf{b}_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^m \hat{y}_{ij} \hat{\mathbf{b}}_i$$

onde

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{b}_i, & i \neq r \\ \hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{a}_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}, & i \neq r \\ \hat{y}_{ij} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \end{cases}$$

Finalmente, para obter  $\hat{z}_j - c_j$  usa-se a definição:

$$\begin{aligned} \hat{z}_j - c_j &= \hat{\mathbf{c}}_B^T \hat{\mathbf{y}}_i - c_j = \sum_{i=1, i \neq r}^m c_{B_i} \left( y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} c_k - c_j = \\ &= \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ij} - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left( \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ik} - c_k \right) \end{aligned}$$

Então,

$$\hat{z}_j - c_j = z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$$

### Método Simplex Dual.

A partir de um problema linear, designado por problema primal, pode-se escrever um outro problema linear: o seu dual. Estes dois formam, então, um par típico de problemas duais e partilham propriedades teóricas que permitiram o desenvolvimento de algoritmos para resolver problemas lineares, entre os quais, o método simplex dual, a seguir descrito. Considere-se o seguinte problema linear

$$\begin{aligned} \min Z &= \mathbf{b}^T \mathbf{w} \\ \text{s. a } \mathbf{A}^T \mathbf{w} &\geq \mathbf{c} \end{aligned} \tag{10}$$

este problema é o dual do problema (9). Conhecida uma solução básica do primal com um ou mais  $x_{B_i} < 0$ , mas com  $z_j - c_j \geq 0$  para todo o  $j$ . Tal como no método simplex, desta solução passa-se para uma solução ótima mudando apenas um vector da base em cada iteração. Os critérios para mudança de base são:

- vector a sair: escolher

$$x_{B_R} = \min_i \{x_{B_i}, x_{B_i} < 0\}$$

a coluna  $\mathbf{b}_r$  sai da base e  $x_{B_r}$  é levada a zero.

- vector a entrar para a base: o vector  $\mathbf{a}_k$  a entrar para a base é determinado por:

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}, \quad y_{rj} < 0 \right\}$$

Se  $\theta = 0$ ,  $Z$  não muda e tem-se um caso de degenerescência dual. Se  $\theta$  não for único, na iteração seguinte um ou mais  $z_j - c_j = 0$  para vectores não pertencentes à base primal e aparece degenerescência dual. Se o primal tiver solução não limitada, o dual não tem solução.

## 4 Modelos para obter Carteiras de Investimento Otimizadas

Este tema é objecto de estudo já há várias décadas e, como tal, existem muitos modelos propostos para obter carteiras de investimento otimizadas. De forma geral, estes modelos baseiam-se em minimizar uma medida risco ou maximizar o valor esperado de uma função de utilidade  $\mu\rho(x) - 1/2R(x)$ , de modo a que  $e^T x = 1$ , onde como será definido mais adiante  $\rho(x)$  é o retorno da carteira e  $R(x)$  é o risco da carteira,  $\mu$  é um parâmetro de compensação entre o risco e o retorno e  $\mathbf{e}$  é um vector coluna com  $n$  uns.

Existem modelos de período único, isto é, consideram-se apenas dois instantes: o instante inicial  $t = 0$  e o instante final  $t = 1$ , para representar a situação onde se escolhe a carteira em  $t = 0$  e obtém-se o retorno em  $t = 1$ ; e modelos multiperódicos, que são uma generalização dos modelos de período único. Alguns destes podem ser vistos nos Anexos A1.

Irão ser apresentados quatro modelos, em período único, e em nenhum se considera a variação do valor do dinheiro.

Para começar, define-se, para o modelo de Markowitz, o retorno da carteira que valerá também para os outros três modelos mais adiante e depois a medida de risco, que será a variância do retorno da carteira. Seja  $r \in \mathbb{R}^n$  um vector aleatório dos retornos dos activos. Supondo que  $r$  é dado por uma distribuição de probabilidade conjunta com valor esperado  $\bar{r} = E[r]$  e matriz de covariância  $\Sigma = E[(r - \bar{r})(r - \bar{r})^T] = E[rr^T] - \bar{r}\bar{r}^T$ , o retorno da carteira é dado pela média do seu retorno

$$\rho(\mathbf{x}) = E[r^T \mathbf{x}] = \bar{r}^T \mathbf{x} \quad (11)$$

E o risco é, como dito anteriormente, dado pela variância do retorno

$$R(\mathbf{x}) = E[(r^T \mathbf{x} - E(r^T \mathbf{x}))^2] = E[\mathbf{x}^T (r - \bar{r})(r - \bar{r})^T \mathbf{x}] = \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}$$

### 4.1 Modelo de Markowitz

O modelo de Markowitz tem muitas muitas variantes (ver Anexo A.1), de entre as quais foi escolhida a seguinte:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \\ \text{s.a.} \quad & e^T \mathbf{x} = 1 \\ & \bar{r}^T \mathbf{x} \geq \rho \end{aligned} \quad (12)$$

Neste modelo, pretende-se encontrar a carteira,  $\mathbf{x}$ , com variância mínima, de modo a que, o capital disponível para investimento seja esgotado e o retorno da carteira seja pelo menos  $\rho$ .

### 4.2 Modelo de Konno

O modelo de Konno surge como resposta a duas dificuldades da altura do seu desenvolvimento: embora, o modelo de Markowitz (12) seja teoricamente interessante, em termos computacionais é dispendioso resolver um problema de programação quadrática quando

existem muitas variáveis e, conseqüentemente, uma matriz de covariância muito grande. E a outra dificuldade tem a ver com os modelos de equilíbrio [7], [12] onde se partia de pressupostos pouco razoáveis em relação à realidade, para tirar conclusões sobre as taxas de retorno dos activos e sobre o mercado. Portanto, o modelo de Konno surge como uma alternativa ao modelo de Markowitz e apresenta vantagens em relação aos modelos de equilíbrio. O modelo de Konno [9] consiste em minimizar a média absoluta dos desvios (MAD) e formula-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } w(x) &= E \left[ \left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[ \sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right| \right] \\ \text{s.a. } \sum_{j=1}^n E[R_j] x_j &\geq \rho M_0 \\ \sum_{j=1}^n x_j &= M_0 \end{aligned}$$

onde  $R_j$  é o retorno do activo  $j$ ,  $M_0$  é o montante total inicial para investimento,  $\rho$  é retorno mínimo desejado pelo investidor e  $x_j$  corresponde ao capital investido no activo  $j$ .

Uma observação interessante é que se os retornos dos activos tiverem distribuição normal multivariada, minimizar  $w(x)$  é equivalente a minimizar o desvio-padrão dos retornos. Esta forma do modelo de Konno não é direta em termos de implementação computacional, por esta razão, vai-se transformar este problema num outro equivalente e mais compreensível. Seja  $r_{jt}$  o retorno do activo  $j$ , no período do  $t$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Supondo que o valor esperado de  $R_j$  é aproximado pela média dos retornos  $r_{jt}$ , então, fazendo:

$$r_j = E[R_j] = \sum_{j=1}^T r_{jt}/T$$

pode-se escrever:

$$E \left[ \left| \sum_{j=1}^n R_j x_j - E \left[ \sum_{j=1}^n R_j x_j \right] \right| \right] = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j) x_j \right|$$

Seja ainda  $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ . Então, a partir do problema anterior tem-se um novo problema.

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left| \sum_{j=1}^n a_{jt} x_j \right| \\ \text{s.a. } \sum_{j=1}^n r_j x_j &\geq \rho M_0 \\ \sum_{j=1}^n x_j &= M_0 \end{aligned}$$

Para contornar o módulo da função objectivo faz-se a mudança de variável  $y_t = \left| \sum_{j=1}^n a_{jt}x_j \right|$  e acrescentam-se estas duas restrições  $y_t + \sum_{j=1}^n a_{jt}x_j \geq 0$  e  $y_t - \sum_{j=1}^n a_{jt}x_j \geq 0$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Assim, obtém-se um problema linear equivalente ao problema anterior.

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T y_t \\
& \text{s.a. } y_t + \sum_{j=1}^n a_{jt}x_j \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& \quad y_t - \sum_{j=1}^n a_{jt}x_j \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
& \quad \sum_{j=1}^n r_j x_j \geq \rho M_0 \\
& \quad \sum_{j=1}^n x_j = M_0
\end{aligned} \tag{13}$$

Este é o modelo de Konno utilizado nos resultados mais adiante. A seguir, apresentam-se duas versões robustas do modelo de Markowitz.

### 4.3 Modelo de Markowitz Robusto

A principal motivação para o desenvolvimento de modelos robustos é a existência de incerteza na informação, dados, medições, etc. E quando se resolve um problema de otimização, a solução obtida é ótima de acordo com os dados usados no problema. Em geral, havendo alterações de alguns valores dos dados, a solução também se altera. Com os modelos robustos pretende-se tornar a solução resistente a variações nos dados.

Há, ainda, uma discussão sobre soluções do modelo robusto contra o valor da função objectivo do modelo original e o que acontece é que muitas vezes a solução ótima para o modelo robusto não é ótima para o modelo original [2], o que pode ser um inconveniente em problemas que envolvem minimizar um custo ou maximizar um lucro, por exemplo.

No modelo de Markowitz robusto, define-se o retorno por

$$\mathbf{r} = \mu + \mathbf{V}^T \mathbf{f} + \epsilon \tag{14}$$

onde  $\mu \in \mathbb{R}^n$  é o vector com as médias dos retornos de cada activo,  $\mathbf{f} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^m$  é um vector com o retorno dos factores que influenciam o mercado,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz dos pesos dos mesmos factores e  $\epsilon \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{D})$  é o vector dos retornos residuais,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é a matriz de covariância dos factores,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a matriz dos pesos dos factores em relação a cada activo.

Supondo que  $\epsilon$  é independente de  $\mathbf{f}$  e que a matriz  $\mathbf{F}$  é definida positiva e  $\mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{d})$  é semi-definida positiva.

Assim  $\mathbf{r} \sim \mathbf{N}(\mu, \mathbf{V}^T \mathbf{F} \mathbf{V} + \mathbf{D})$ . O conjunto de incerteza para os elementos de  $\mathbf{D}$ ,  $S_d$ , é dado por

$$S_d = \{\mathbf{D} : \mathbf{D} = \text{diag}(\mathbf{d}), \quad d_i \in [d_i^-, d_i^+], \quad i = 1, \dots, n\}$$



As colunas da matriz  $\mathbf{V}$ , que correspondem aos pesos de cada activo, supõem-se que são aproximadamente conhecidos. O conjunto de incerteza de  $\mathbf{V}$ ,  $S_v$ , é dado por

$$S_v = \{\mathbf{V} : \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{W}, \quad \|\mathbf{W}_i\|_g \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

Onde  $\mathbf{V}_0$  é o estimador dos mínimos quadrados para  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{W}_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{W}$  e  $\|\mathbf{w}\|_g = \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{w}}$  é a norma elíptica de  $\mathbf{w}$  com respeito a uma matriz simétrica e definida positiva  $\mathbf{G}$ .

Finalmente, para o vector  $\mu$ , supõe-se que o seu conjunto de incerteza,  $S_m$  é dado por

$$S_m = \{\mu : \mu = \mu_0 + \xi, \quad |\xi_i| \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n\}$$

Mais à frente, mostra-se uma forma de escolher  $\mathbf{G}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $d^-$ ,  $d^+$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A forma robusta do modelo de Markowitz é

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \max_{\{V \in S_v, D \in S_d\}} \text{Var}[r_x] \\ & \text{s.a.} \quad \min_{\{\mu \in S_m\}} E[r_x] \geq \rho \\ & \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Neste problema, o objectivo é minimizar o pior caso da variância da carteira de modo a que o pior caso do valor esperado da mesma seja pelo menos  $\rho$ . O problema (15) combinado com a definição de retorno da carteira (14) pode ainda ser escrito como

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \max_{\{V \in S_v\}} \{\mathbf{x}^T \mathbf{V}^T \mathbf{F} \mathbf{V} \mathbf{x}\} + \max_{\{D \in S_d\}} \{\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x}\} \\ & \text{s.a.} \quad \min_{\{\mu \in S_m\}} \mu^T \mathbf{x} \geq \rho \\ & \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Como  $d_i^- \leq d_i \leq d_i^+$ , então  $\mathbf{x}^T D \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \bar{D} \mathbf{x}$ . Como a matriz de covariância  $\mathbf{F}$  é definida positiva a função  $\|w\|_f : w \rightarrow \sqrt{w^T F w}$  define uma norma em  $\mathbb{R}^m$ . Assim, o problema anterior é equivalente ao problema robusto dos mínimos quadrados

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \max_{\{V \in S_v\}} \|\mathbf{V} \mathbf{x}\|_f^2 + \mathbf{x}^T \bar{D} \mathbf{x} \\ & \text{s.a.} \quad \min_{\{\mu \in S_m\}} \mu^T \mathbf{x} \geq \rho \\ & \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned}$$

Introduzindo variáveis auxiliares  $\nu$  e  $\delta$  este problema pode ser reformulado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \nu + \delta \\ & \text{s.a.} \quad \max_{V \in S_v} \|\mathbf{V} \mathbf{x}\|_f^2 \leq \nu \\ & \quad \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} \leq \delta \\ & \quad \min_{\{\mu \in S_m\}} \mu^T \mathbf{x} \geq \rho \\ & \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

Se os conjuntos de incerteza  $S_v$  e  $S_m$  forem finitos, com  $s$  e  $r$  elementos, respectivamente, tem-se um problema convexo com restrições quadráticas

$$\begin{aligned}
& \text{minimizar } \lambda + \delta \\
& \text{s.a. } \max_{V \in S_v} \|\mathbf{V}_k \mathbf{x}\|_f^2 \leq \lambda \quad k = 1, \dots, s \\
& \quad \mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} \leq \delta \\
& \quad \min_{\{\mu \in S_m\}} \mu_k \mathbf{x}^T \geq \rho \quad k = 1, \dots, r \\
& \quad \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1
\end{aligned}$$

Se os conjuntos de incerteza para  $\mathbf{V}$  e  $\mu$  forem os definidos anteriormente o pior caso da média dos retornos para uma carteira fixa  $\mathbf{x}$  é dado por

$$\min_{\{\mu \in S_m\}} \mu^T \mathbf{x} = \mu_0^T \mathbf{x} - \gamma^T |\mathbf{x}| \quad (18)$$

E o pior caso da variância é dado por

$$\begin{aligned}
& \text{maximizar } \|(\mathbf{V}_0 + \mathbf{W})\mathbf{x}\|_f^2 \\
& \text{s.a. } \|\mathbf{W}_i\|_g \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned} \quad (19)$$

Fazendo o produto das restrições  $\|\mathbf{W}_i\|_g \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n$  pela carteira  $\mathbf{x}$  obtém-se

$$\|\mathbf{W}\mathbf{x}\|_g = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{W}_i \right\|_g \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|\mathbf{W}_i\|_g \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|$$

Os cálculos anteriores sugerem o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
& \text{maximizar } \|\mathbf{V}_0 \mathbf{x} + \mathbf{w}\|_f^2 \\
& \text{s.a. } \|\mathbf{w}\|_g \leq r
\end{aligned} \quad (20)$$

onde  $r = \alpha^T |\mathbf{x}| = \sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|$  e o valor ótimo de (20) é pelo menos o valor ótimo de (19).

A função objectivo neste último problema é convexa, por isso, a solução ótima  $w^*$  pertence à fronteira da região admissível ( $\|w^*\|_g = r$ ).

Definindo para  $i = 1, \dots, n$

$$W_i^* = \begin{cases} \frac{x_i}{|x_i|} \frac{\alpha_i}{r} w^*, & x_i \neq 0 \\ \frac{\alpha_i}{r} w^*, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então,  $\|W_i^*\|_g = \alpha_i, \forall i = 1, \dots, n$ , o que significa que  $W^*$  é solução admissível para (19) e  $W^* x = \sum_{i=1}^n x_i W_i^* = w^*$ . Assim a solução ótima em (19) e (20) é a mesma.

Fixando uma carteira  $\mathbf{x}$ , o pior caso da variância é no máximo  $\nu$  se e só se

$$\max_{\{y: \|y\|_g \leq r\}} \|y_0 + y\|_f^2 \leq \nu \quad (21)$$

onde  $y_0 = V_0 x$  e  $r = \alpha^T |x|$ . Uma restrição hiperbólica,  $z^T z \leq xy$ ,  $x, y > 0$  pode ser escrita como uma restrição cone de segunda ordem [11]

$$z^T z \leq xy \iff 4z^T z \leq (x+y)^2 - (x-y)^2 \iff \left\| \begin{matrix} 2z \\ x-y \end{matrix} \right\| \leq x+y$$

Usando três resultados teóricos em [8] têm-se as formulações seguintes.  
Aplicando estes resultados, o modelo fica

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \nu + \delta \\ & \text{s.a } \left\| \begin{matrix} 2\bar{\mathbf{D}}^{1/2} \mathbf{x} \\ 1 - \delta \end{matrix} \right\| \leq 1 + \delta \\ & \mu_0^T \mathbf{x} - \gamma^T |\mathbf{x}| \geq \rho \\ & \alpha^T |\mathbf{x}| \leq r \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1 \\ & (r; \nu; x) \in \mathcal{H}(\mathbf{V}_0, \mathbf{F}, \mathbf{G}) \end{aligned}$$

Para tirar o módulo das restrições faz-se  $\Psi = |(\mathbf{x})|$  e acrescentam-se as restrições  $\Psi - \mathbf{x} \geq 0$  e  $\Psi + \mathbf{x} \geq 0$ . Finalmente, modelo de Markowitz robusto, na forma de SOCP é:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \nu + \delta \\ & \text{s.a } \left\| \begin{matrix} 2\bar{D}^{1/2} x \\ 1 - \delta \end{matrix} \right\| \leq 1 + \delta \\ & \mu_0^T x - \gamma^T \Psi \geq \rho \\ & \Psi_i \geq x_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \Psi_i \geq -x_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{e}^T x = 1 \\ & (\alpha^T \Psi; \nu; x) \in \mathcal{H}(\mathbf{V}_0, \mathbf{F}, \mathbf{G}) \end{aligned} \tag{22}$$

onde  $(\alpha^T \Psi; \nu; x) \in \mathcal{H}(V_0, F, G)$  significa que existem  $\sigma, \tau > 0$  e  $t \in \mathbb{R}_+^m$  tais que:

$$\begin{aligned} & \tau + \mathbf{e}^T t \leq \nu, \\ & \sigma \leq \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}, \\ & \left\| \begin{matrix} 2r \\ \sigma - \tau \end{matrix} \right\| \leq \sigma + \tau, \\ & \left\| \begin{matrix} 2w_i \\ 1 - \sigma\lambda_i - t_i \end{matrix} \right\| \leq 1 - \sigma\lambda_i + t_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

onde  $Q\Lambda Q^T$  é a decomposição espectral de  $H = G^{-1/2}FG^{-1/2}$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$  e  $w = Q^T H^{1/2} G^{1/2} V_0 x$ .

Sejam  $\mathbf{B} = [\mathbf{f}^1 \mathbf{f}^2 \dots \mathbf{f}^p] \in \mathbb{R}^{m \times p}$  a matriz dos retornos de cada factor de mercado em cada

período,  $\mathbf{A} = [\mathbf{e} \ \mathbf{B}^T]$ ,  $y_i = [r_i^1 \ r_i^2 \ \dots \ r_i^p]^T$  o vector dos retorno do activo  $i$  nos  $p$  períodos,  $x_i = [\mu_i \ V_{1i} \ V_{2i} \ \dots \ V_{mi}]^T$  e  $\epsilon_i = [e_i^1 \ e_i^2 \ \dots \ e_i^p]$  vector dos retornos residuais do activo  $i$  nos  $p$  períodos. A equação anterior escreve-se como

$$y_i = \mathbf{A}x_i + \epsilon_i$$

O estimador  $\bar{x}_i$  dos mínimos quadrados para  $x_i$  é a solução de

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{x}_i = \mathbf{A}^T y_i \iff \bar{x}_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T y_i$$

Substituindo  $y_i = \mathbf{A}x_i + \epsilon_i$

$$\bar{x}_i - x_i = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \epsilon_i \sim N(0, \Sigma)$$

Com  $\Sigma = \sigma_i^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ . Daqui,

$$\mathcal{X} = \frac{1}{\sigma_i^2} (\bar{x}_i - x_i)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) (\bar{x}_i - x_i) \sim \chi_{m+1}^2$$

A variância  $\sigma_i^2$  é desconhecida. Mas, por um resultado da teoria de regressão, pode-se substituir em cima,  $\sigma_i^2$  por  $(m+1)s_i^2$ , onde  $s_i^2$  é o estimador da variância  $\sigma_i^2$  e é dado por

$$s_i^2 = \frac{\|y_i - \mathbf{A}\bar{x}_i\|^2}{p - m - 1}$$

obtendo-se assim, uma nova variável aleatória

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{(m+1)s_i^2} (\bar{x}_i - x_i)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) (\bar{x}_i - x_i)$$

seguindo a distribuição F com  $m+1$  graus de liberdade no numerador e  $(p-m-1)$  graus de liberdade no denominador. Sejam  $0 < \omega < 1$  e  $\mathcal{F}_J$  a função de distribuição cumulativa da distribuição F com  $J$  graus de liberdade no numerador e  $(p-m-1)$  graus de liberdade no denominador, define-se  $c_J(\omega)$  como a solução de  $\mathcal{F}_J(c_J(\omega)) = \omega$ .

Finalmente, uma possível escolha para os valores de  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $G$  e  $V_0$  é a seguinte [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \bar{\mathbf{V}}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T - \frac{1}{p}(\mathbf{B}\mathbf{e})(\mathbf{B}\mathbf{e})^T, \quad \alpha_i = \sqrt{mc_m(\omega)s_i^2}, \\ \gamma_i &= \sqrt{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{11}^{-1} c_1(\tilde{\omega}_i^2)s_i^2}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{23}$$

## 4.4 Modelo de Bertsimas e Sim

Considere-se a restrição  $i$  de um problema linear  $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \leq b_i$ . Seja  $J_i$  o conjunto dos coeficientes  $a_{ij}$ ,  $j \in J_i$  sujeitos a incerteza, isto é,  $\tilde{a}_{ij}, j \in J_i$  têm uma distribuição simétrica no intervalo  $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$  com média  $a_{ij}$ . Para cada  $i$  introduz-se o parâmetro  $\Gamma_i$ , com valores no intervalo  $[0, |J_i|]$ . Com este parâmetro pretende-se ajustar robustez contra conservadorismo da solução e ter a garantia de que a solução do problema se mantém ótima desde que no máximo se alterem  $\lfloor \Gamma_i \rfloor$  coeficientes na restrição  $i$ , que estão sujeitos a incerteza.

Bertsimas propôs uma versão robusta mais simples para o modelo de Markowitz: um modelo linear robusto.

Considera-se o modelo de Markowitz

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i - \Phi \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2 \\
& \text{s. a. } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \quad x_i \geq 0
\end{aligned} \tag{24}$$

onde  $\sigma_i$  é o desvio-padrão dos retornos do activo  $i$ ,  $\Phi$  é um parâmetro de controlo entre o risco e o retorno da carteira e  $x_i$  é o investimento no activo  $i$ . Seja  $\mathbf{x}^*$  a solução ótima. Este problema pode ser escrito como um problema linear, na forma robusta proposta por Bertsimas e Sim [4]:

$$\begin{aligned}
& \max z \\
& \text{s. a. } z \leq \sum_{i=1}^n \bar{r}_i x_i - \beta(x, \Gamma) \\
& \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\
& \quad x_i \geq 0
\end{aligned}$$

onde

$$\beta(x, \Gamma) = \max_{\{S \cup t \mid S \subseteq N, |S| = \lfloor \Gamma \rfloor, t \in N \setminus S\}} \left\{ \sum_{j \in S} \sigma_j x_j + (\Gamma - \lfloor \Gamma \rfloor) \sigma_t |x_t| \right\}$$

E este último problema é equivalente ao seguinte [4]

$$\begin{aligned}
\beta_i(\mathbf{x}^*, \Gamma_i) &= \max \sum_{j \in J_i} \hat{\sigma}_j |x_j^*| z_{ij} \\
& \text{s. a. } \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\
& \quad 0 \leq z_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J_i
\end{aligned} \tag{25}$$

## 5 Aplicação Computacional

Para aplicação computacional foram utilizados três *software*: Excel, Lingo e Matlab. O único modelo experimentado nos três *software*, foi o de Markowitz e em termos de carteira o resultado foi o mesmo, mas em termos de objectivo houve pequenas diferenças (na ordem de  $10^{-4}$ ). Segue-se agora uma descrição dos dados usados para a aplicação de quatro dos modelos atrás abordados. Após uma breve descrição dos *software* usados, mostrar-se-ão alguns resultados dos retornos das carteiras obtidas e comparações entre os mesmos.

### 5.1 Dados

Os dados utilizados para aplicação dos modelos são os valores de fecho diários de empresas portuguesas pertencentes ao PSI20 nos anos de 2003 a 2015, mas os resultados que serão expostos são relativos aos períodos de 2010 a 2015, portanto, os relativamente mais recentes. As experiências foram feitas usando retornos diários e semanais (à sexta-feira) das empresas consideradas para a composição da carteira. Por causa de cálculos envolvendo o modelo de Markowitz robusto, foram selecionadas sete empresas no PSI20, para a composição das carteiras.

### 5.2 Software

Os *software* utilizados foram Excel, Lingo e Matlab. O Excel, é capaz de resolver problemas lineares com o método simplex e problemas quadráticos com o método do Gradiente Reduzido Geral (GRG). Um inconveniente do *solver* do Excel é que não consegue resolver o problema de optimização se o número de variáveis for muito grande (mais de 200), o que se verificou com o modelo Konno.

O Lingo utiliza tanto o método simplex, por defeito, como o método simplex dual para resolver problemas lineares e métodos do ponto interior para resolver problemas quadráticos [22].

À semelhança do Lingo, o Matlab, através do pacote *linprog*, usa o método simplex dual para problemas lineares, havendo também a possibilidade de usar o método simplex, ou o método do ponto interior, desde que seja especificado [19]. Este último é o método utilizado pelo pacote *quadprog* para resolver problemas quadráticos [18]. O modelo de Markowitz robusto foi resolvido, apenas no Matlab, usando os pacotes SeDuMi e YALMIP, sendo o SeDuMi o pacote preparado para resolver problemas do tipo SOCP usando técnicas de incorporação auto-dual sugeridas por Ye, Todd e Mizuno [17]. O YALMIP permite que o problema seja representado simbolicamente, da mesma forma que se escreve em papel. O YALMIP identifica o tipo de problema (linear, quadrático, SOCP, etc..) e procura por algum pacote, que esteja instalado no Matlab e que consiga resolver esse tipo de problema. Em particular, no caso de ser um problema do tipo SOCP, o YALMIP prepara-o para ser resolvido pelo SeDuMi, ou outro pacote, desde que esteja instalado no Matlab [20]. Os modelos de Konno e de Bertsimas e Sim, também foram resolvidos no Matlab e no Lingo, visto tratarem-se de problemas lineares e quadráticos.

Exemplos dos comandos em Lingo e Matlab podem ser vistos nos Anexos A2 e A3.

### 5.3 Resultados e Comparações

Agora serão expostos alguns resultados da aplicação dos modelos de Markowitz, Konno, Markowitz robusto e modelo de Bertsimas e Sim. O objectivo será observar como varia o retorno da carteira, de semana para semana, no ano em que foi aplicada.

Foram pré-definidos um retorno de 0.00001 para as carteiras, assim como, o montante inicial de investimento de 10000, para todos os modelos. Assim, o retorno da carteiras é calculado multiplicando o retorno da carteira pelo montante inicial de investimento. Para o modelo de Markowitz robusto definiu-se, além do retorno pretendido, o parâmetro  $\omega$  que foi obtido por tentativas e para um conjunto de dados só era encontrada uma solução para  $\omega = 0.4$  mas noutros casos houve solução para  $\omega = 0.9$ . O critério de escolha foi que o maior valor de  $\omega$  que produzisse uma solução era o considerado para resolver o problema. Para factor do mercado foi considerado o retorno do PSI20 que também foi usado para comparar com as carteiras como se pode ver nos gráficos a seguir e o resto dos parâmetros foram calculados como em (23) e  $\mathbf{D} = 0.1 \text{diag}(\mathbf{V}^T \mathbf{FV})$  [8]. No modelo de Bertsimas e Sim foram usados  $\Phi = 10$  e  $\Gamma = 6.5$ . Apresentam-se, a seguir, quatro gráficos onde cada um dos modelos produziu uma carteira com melhor comportamento em termos de retorno, do que os outros três, mas outros comentários podem ser feitos.

Houve casos em que nenhuma das carteiras foi particularmente boa, um exemplo disso é a figura 2, embora os retornos das carteiras dos modelos robustos tenham um melhor comportamento. Acontece muitas vezes a curva correspondente aos retornos de PSI20 ter um comportamento oposto às curvas dos retornos das carteiras, isto significa que as empresas consideradas para a composição da carteira podem ter sido bem ou mal escolhidas, ou seja, num dado instante o PSI20 tem um retorno positivo e a carteira tem um retorno negativo, então a composição da carteira foi mal escolhida. O contrário também pode acontecer, onde o retorno da carteira é positivo e o retorno do PSI20 é negativo e nesse caso, foram escolhidas as melhores empresas para a composição da carteira, por exemplo, figura 1.

Na figura 3, as melhores carteiras parecem ser a do modelo robusto de Markowitz e a do modelo de Bertsimas.

Na figura 4, apresenta-se um exemplo onde o modelo de Markowitz e o modelo de Konno produziram as melhores carteiras, em termos de retorno. Ainda se pode observar no gráfico de baixo que o modelo de Markowitz robusto e o de Bertsimas e Sim produziram a mesma carteira e portanto, estas tiveram o mesmo retorno.

As experiências feitas sugerem que o modelo de Bertsimas e Sim identifica qual é a empresa que teve maior média de retorno e indica um investimento de todo o montante inicial nessa empresa. Isto explica porque é que em muitos dos gráficos o retorno associado a carteira obtida deste modelo é semelhante, senão igual, embora se tratem de dados de períodos diferentes. Isto também pode reflectir uma das desvantagens de usar janelas de tempo extensas, por exemplo, dois anos de dados, pois nem toda a informação de que se dispõe pode ser relevante, como pode ser visto na figura 5.

Mais gráficos deste tipo podem ser vistos em Anexos A4 e sobre esses podem-se tirar conclusões idênticas.

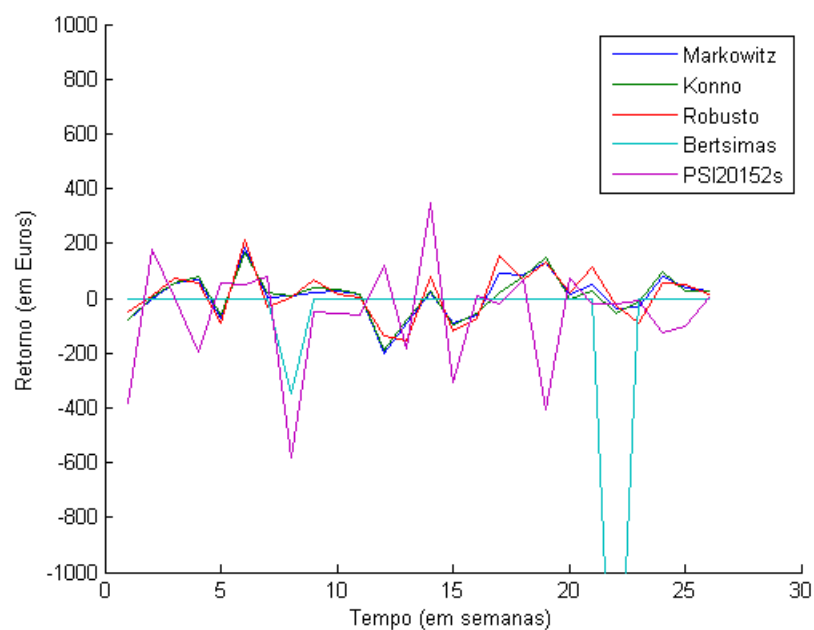


Figura 1: Retornos das carteiras obtidas dos dados diários do primeiro semestre de 2015 no segundo semestre de 2015.

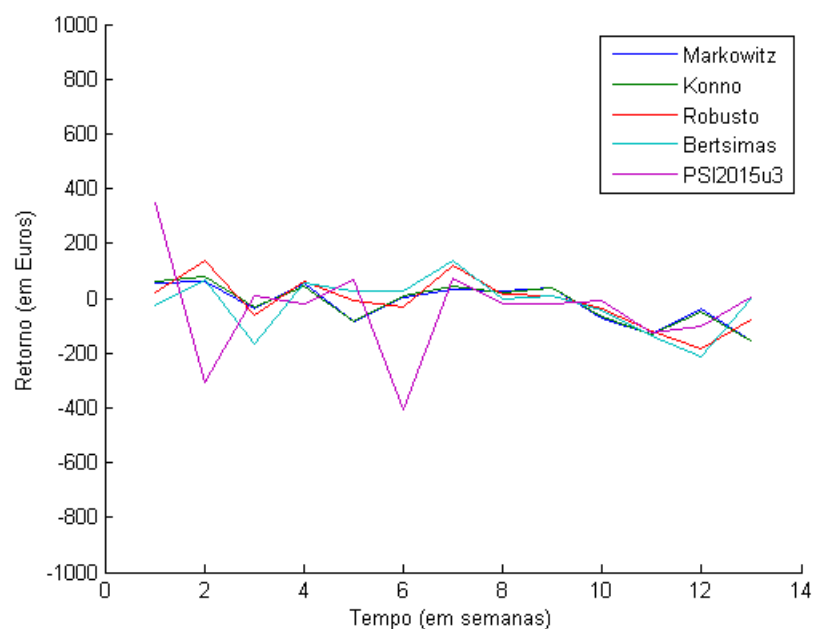


Figura 2: Retornos das carteiras obtidas dos dados diários dos primeiros nove meses de 2015 no último trimestre de 2015.



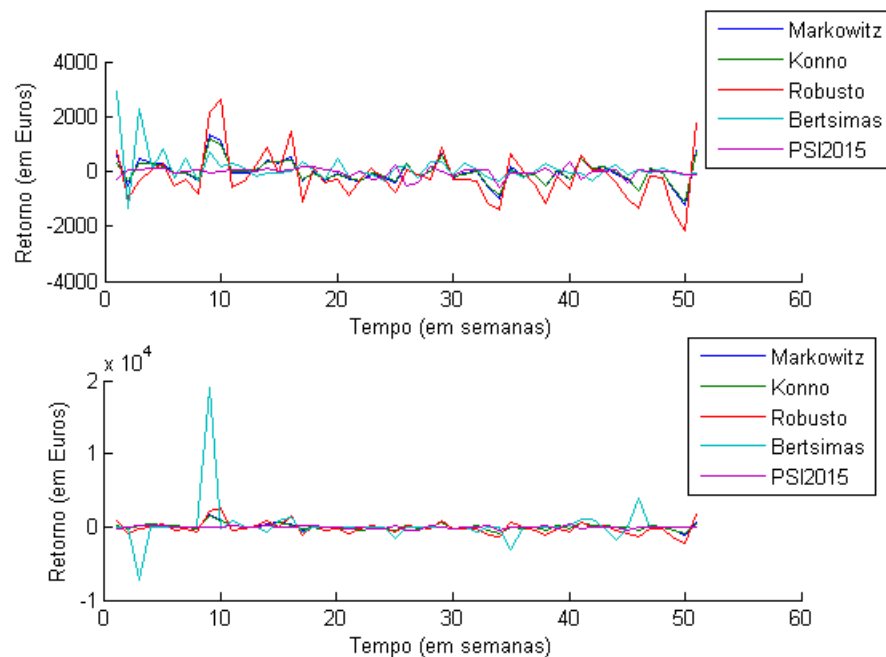


Figura 3: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2014 em 2015.

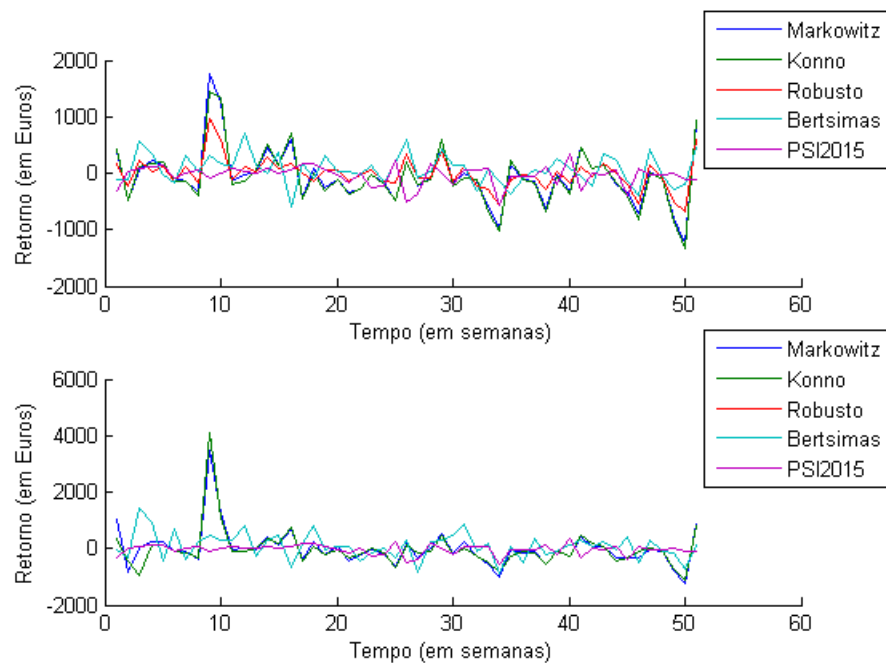


Figura 4: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2013 em 2015.

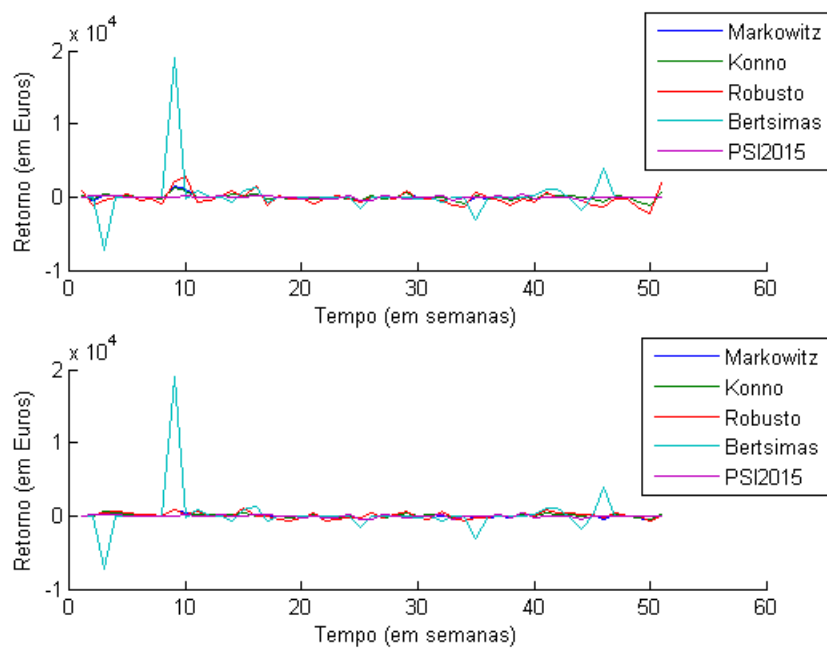


Figura 5: Retornos das carteiras obtidas dos dados diários e semanais (sextas-feiras) dos anos de 2013/2014 em 2015.



## 6 Conclusão

De forma geral, os modelos parecem detectar quais as empresas que têm as médias de retorno maiores e, para a composição da carteira, essas levam maior percentagem de capital. Este deve ser um cuidado a ter, verificar se a solução do modelo mostra concordância com os dados, pois podem haver situações onde minimizar a função objectivo obriga a que haja um investimento num activo com retorno negativo, por exemplo. Por isso, não se deve olhar, sem crítica, para o que sai do modelo; também, é preciso ter atenção aos dados.

De todos os gráficos que foram expostos não houve um modelo que fosse globalmente melhor que os restantes, excepto em certos períodos de tempo, ou seja, depende do período de tempo e do período dos dados usados para os modelos houve um que foi melhor que os outros, mas nunca o mesmo.

Tanto o modelo de Markowitz, como o de Konno, produziram carteiras mais diversificadas em termos do número de activos onde investir, enquanto que os modelos robustos indicaram no máximo dois. O modelo de Bertsimas e Sim pareceu detectar a empresa com maior média de retorno e indicou um investimento total nessa mesma empresa. O modelo de Markowitz robusto na maioria dos casos, indicou cerca 0.99 na empresa com maior média de retorno e 0.01 na segunda maior.

Investir em várias empresas e em diferentes sectores pode ser mais sensato do que investir só em duas empresas, por exemplo. Supondo que há perdas de capital em alguma da composição da carteira, a parte da carteira que gerou, realmente, retorno no fim compensa a parte da carteira que gerou perdas e, assim, o investimento não é, totalmente, perdido. Enquanto que, se isto acontecer investindo só em duas empresas o risco de perda é maior. Por outro lado, este tipo de carteiras foram obtidas de modelos robustos, e portanto, não são tão afectadas por alterações nos dados. Houve um resultado curioso, onde o modelo de Bertsimas e Sim produziu a mesma solução que o modelo Markowitz robusto, um caso onde problemas diferentes tiveram a mesma solução ótima o que pode sugerir que sejam problemas equivalentes, pelo menos para o conjunto de dados usados, neste caso específico. Os modelos estudados são úteis; de facto, sugerem palpites plausíveis do ponto de vista teórico, mas do ponto de vista da realidade, do ponto de vista do investidor, pode não ser de todo seguro seguir o modelo, até porque, como sugerido nos gráficos, os modelos resultam só num certo momento ou intervalo de tempo, querendo isto dizer que, se hoje investir numa certa carteira e obter um retorno satisfatório, e fizer o mesmo investimento, por exemplo, amanhã, o resultado do investimento seria diferente, para melhor ou para pior. E, enquanto, não se consegue prever o futuro com exactidão, o melhor que se tem a fazer é construir modelos que dêem uma ideia sobre o que possa vir a acontecer.

## 7 Referências

### 7.1 Artigos e livros

- [1] Ben-Tal, A., A. Nemirovski. 1998, *Robust convex optimization*, Math. Oper. Res. **23** 769-805
- [2] Ben-Tal, A., A. Nemirovski. 1999, *Robust solutions to uncertain programs*, Oper. Res. Lett. **25** 1-13
- [3] Ben-Tal, A., A. Nemirovski. 2000, *Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data*, Math. Programming **88** 411-424
- [4] Bertsimas, D., Sim, M. 2004, *The Price of Robustness*. Vol. 52, No. 1, pp. 35-53
- [5] Cadilhe, M. 1985. *Matemática Financeira Aplicada*, 4ª edição.
- [6] El-Ghaoui, L. H. Lebre. 1997, *Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **18** 1035-1064
- [7] Elton, E., J. and M. J. Gruber. 1987, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (3rd Ed.) John Wiley and Sons, Inc., New York .
- [8] Goldfarb, D., Iyengar, G. 2003, *Robust Portfolio Selection Problems*. Vol. 28, No. 1, pp. 1-38
- [9] Konno, H., Yamazaki, H. 1991, *Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market*. Management Science, Vol. 37, No. 5, 519-531
- [10] Lobo, S., M., Vandenberghe, L. , Boyd, S., Lebre, H. 1998, *Linear Algebra and its Applications*, 193-228
- [11] Nesterov, Y., A., Nemirovski. 1993, *Interior-Point polynomial Algorithms in Convex Programming*. SIAM, Philadelphia. PA.
- [12] Sharpe, W.F. 1964, *Capital Asset Price: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk*, J. Finance, **19**, 425-442
- [13] Soyster, A. L. 1973, *Convex Programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming*. Oper. Res. **21** 1154-1157.
- [14] Steinbach, C., Marc. 2001, *Markowitz Revisited: Mean-Variance Models in Financial Portfolio Analysis*. SIAM REVIEW. Vol. 43, No. 1, pp. 31-85
- [15] Sturm, F., Jos 1998, *Using SeDuMi 1.02, a Matlab\*toolbox for optimization over symmetric cones*.
- [16] Winston, L., W., Venkataramanan, M. *Introduction To Mathematical Programming*, 4th edition
- [17] Y. Ye, M.J. Todd, and S. Mizuno. 1994, An  $O(\sqrt{n}L)$ -iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm. *Mathematics of Operations Research*, 19:53-67

## 7.2 *Sites*

- [18] Matlab: quadprog,  
<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/quadprog.html>, 10/2016
- [19] Matlab: linprog,  
<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/linprog.html>, 11/2016
- [20] Yalmip,  
<https://yalmip.github.io/tutorial/socpprogramming/>, 05/2017
- [21] Quadratic Programming Algorithms,  
<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/quadratic-programming-algorithms.html>,  
09/2017
- [22] Powefull LINGO solvers,  
[http://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling?  
id=88:powerful-lingo-solverscatid=89](http://www.lindo.com/index.php/products/lingo-and-optimization-modeling?id=88:powerful-lingo-solverscatid=89), 09/2017

# A Anexos

## A.1 Variantes do Modelo de Markowitz

Os modelos seguintes são todos variantes do modelo de Markowitz [14], assim, em todos trata-se de minimizar a variância da carteira em diferentes cenários, no caso de período único e no caso multiperíódico.

Os modelos seguintes referem-se a casos de período único:

1.

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^T \Sigma x - \mu \bar{r}^T x \\ \text{s.a.} \quad & e^T x = 1 \end{aligned}$$

onde  $\mu$  é um parâmetro de compensação entre o risco,  $x^T \Sigma x$ , e o retorno,  $\bar{r}^T x$ .

2. Acrescentando ao modelo anterior uma conta bancária,  $x^c$ , com retorno determinístico  $\bar{r}^c$ . A composição da carteira fica assim  $(x, x^c)$  e  $x$ ,  $r$ ,  $\bar{r}$ ,  $\Sigma$  referem-se apenas a parte com risco da carteira.

A covariância associada à conta bancária desaparece e o risco fica  $x^T \Sigma x$  e o retorno da carteira é  $\bar{r}^T x + r^c x^c$  e o modelo é:

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c} \quad & \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^T \Sigma x \\ \text{s.a.} \quad & e^T x + x^c = 1 \\ & r^T x + r^c x^c = \rho \end{aligned}$$

3. No modelo anterior, é possível passar a restrição sobre o retorno da carteira para a função objectivo, associando-lhe um parâmetro de compensação,  $\mu$ , entre esse retorno e o risco, de forma a obter um modelo equivalente:

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c} \quad & \frac{1}{2}x^* \Sigma x - \mu(\bar{r}^* x + r^c x^c) \\ \text{s.a.} \quad & e^* x + x^c = 1 \end{aligned}$$

4. Acrescentando ainda, um activo com perda total garantida,  $x^l$ . O risco de uma carteira desta é na mesma  $x^T \Sigma x$  e o retorno é  $\bar{r}^T x + r^c x^c$ . O modelo fica:

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c, x^l} \quad & \begin{pmatrix} x \\ x^c \\ x^l \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \\ x^l \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^T \Sigma x \\ \text{s.a.} \quad & e^T x + x^c + x^l = 1, \quad x^l \geq 0 \\ & r^T x + r^c x^c = \rho \end{aligned}$$

5. Analogamente, ao que foi feito entre 2 e 3, passando a restrição sobre o retorno para a função objectivo, obtém-se um modelo equivalente ao anterior

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c, x^l} \quad & \frac{1}{2} x^T \Sigma x - \mu(\hat{r}^T x + r^c x^c) \\ \text{s.a.} \quad & e^T x + x^c + x^l = 1, x^l \geq 0 \end{aligned}$$

Agora, seguem-se os modelos de Markowitz para risco em queda. Para uma função  $\omega$  de um vector aleatório  $r$  com distribuição  $P$ , o risco em queda de ordem  $q > 0$  com retorno pretendido  $\tau \in \mathbb{R}$  é:

$$R_\tau^q(\omega) := E[|min(\omega(r) - \tau, 0)|^q] = \int_{\mathbb{R}^n} |min(\omega(r) - \tau, 0)|^q dP$$

**6.** Minimizar o risco em queda  $R_q(x, x^c)$  para activos de risco, dinheiro e perda, com um retorno fixo  $\rho(x, x^c) = \rho$ :

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c} \quad & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} min(r^T x + r^c x^c - \rho, 0)^2 dP \\ \text{s.a.} \quad & e^T x + x^c = 1, \quad x^l \geq 0 \\ & \bar{r}^T x + r^c x^c = \rho \end{aligned}$$

**7.** Minimizar o **risco em queda**  $R_q(x, x^c, x^l)$  para activos de risco, dinheiro e perda, com um retorno fixo  $\rho(x, x^c, x^l) = \rho$ :

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c} \quad & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} min(r^T x + r^c x^c - \rho, 0)^2 dP \\ \text{s.a.} \quad & e^T x + x^c + x^l = 1, \quad x^l \geq 0 \\ & \bar{r}^* x + r^c x^c = \rho \end{aligned}$$

**8.** Minimizar o **risco em queda**  $R_\rho$  para activos de risco e dinheiro, com um retorno mínimo  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \min_{x, x^c} \quad & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} min(r^* x + r^c x^c - \rho, 0)^2 dP \\ \text{s.a.} \quad & e^T x + x^c = 1 \\ & \bar{r}^* x + r^c x^c = \rho + \theta, \quad \theta \geq 0 \end{aligned}$$

Agora, seguem os modelos de Markowitz multiperiódicos. Seja  $T + 1$  o número de períodos de investimento. Estes períodos podem não ser todos iguais. A carteira é escolhida em  $t = 0$  e reestruturada nos períodos seguintes  $t = 1, \dots, T$ . As carteiras e vectores de retorno são  $x_t, r_{t+1} \in \mathbb{R}^n$  produzindo o capital  $r_t x_{t-1}$  imediatamente antes da decisão no tempo  $t$ . Conta bancária, o seu retorno e activos de perda com a notação  $x_t^c, r_t^c$  e  $x_t^l$ , o capital disponível é  $\omega_t = r_t x_{t-1}$ , ou se houver dinheiro,  $\omega_t = r_t x_{t-1} + r_t^c x_t^c$ . Os retornos associados à conta bancária são conhecidos à priori, enquanto que os retornos associados a activos são



aleatórios.

A decisão no tempo  $t$  é feita depois da observação das realizações de  $r_1, \dots, r_t$ , mas antes da observação de  $r_{t+1}, \dots, r_{T+1}$ .

Supondo que, a distribuição dos retornos até  $T$  é dada por uma árvore de cenário: cada  $r_t$  tem várias realizações  $r_j$  com probabilidade  $p_j > 0, j \in L_t$ , tal que  $L_t$  forme um nível na árvore. O conjunto dos nós,  $V$ , é a união dos  $L_t, t = 0, \dots, T$  e o conjunto das folhas, cada uma cada uma representando um cenário é  $L_T = L$ . A esperança condicional  $\bar{r}_T = E(r_{T+1}|L_T)$  e a sua matriz covariância

$$\Sigma_T = E[(r_{T+1} - \bar{r}_T)(r_{T+1} - \bar{r}_T)^T | L_T] = E(r_{T+1}r_{T+1}^T | L_T) - \bar{r}_T\bar{r}_T^T$$

definem variáveis aleatórias no mesmo espaço, com realizações  $\bar{r}_j, \Sigma_j$  em  $L_T$ .

O retorno e o risco são definidos como média e variância do capital final  $\omega_{T+1}$ , respetivamente. Na ausência de dinheiro vivo, escrevem-se

$$\rho(x) = E(r_{T+1}^T x_T) = E(\bar{r}_T^T x_T) = \sum_{j \in L}^{max} p_j \bar{r}_j^T x_j$$

e

$$R(x) = E[(r_{T+1}^T x_T - \rho(x))^2]$$

**9.** O modelo de Markowitz multiperódico escreve-se:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{j \in L} \frac{1}{2} x_j^T \tilde{\Sigma}_j x_j - \frac{1}{2} \rho^2 \\ \text{s.a.} \quad & e^T x_0 = 1 \\ & e^T x_j = r_j^T x_i \quad \forall j \\ & \sum_{j \in L} \tilde{r}_j^T x_j = \rho \end{aligned}$$

**10.** Sejam  $r_1^c$  o retorno do dinheiro no período 1,  $r_2^c$  o retorno do dinheiro no período 2,  $r^c := r_1^c r_2^c$  o retorno combinado,  $\tilde{r}_j = p_j \bar{r}_j, \tilde{\Sigma}_j = p_j(\Sigma_j + \bar{r}_j \bar{r}_j^*)$ ,  $\tilde{r}_j^c = p_j r_j^2$  e supondo que  $\Sigma_j > 0$ ,  $\bar{r}_j \neq r_{t+1}^c e$ , para algum  $j$  e  $r^c \neq 0$ . O modelo de Markowitz multi-peródico envolvendo uma conta bancária escreve-se:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_j \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_j \\ x_j^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_j & r_{T+1}^c \tilde{r}_j \\ r_{T+1}^c \tilde{r}_j^T & r_{T+1}^c \tilde{r}_j^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x^c \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho^2 \\ \text{s.a.} \quad & e^T x_0 + x_0^c = 1 \\ & e^T x_j + x_j^c = r_j^T x_i + r_t^c x_i^c, \quad \forall j \\ & \sum_j \tilde{r}_j^T x_j + \tilde{r}_j^c x_j^c = \rho \end{aligned}$$

**11.** O problema **9.** com uma restrição sobre o retorno, para que, tenha um valor mínimo  $\rho$  é:

$$\begin{aligned} \min_{x, \theta} \quad & \sum_j \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_j \\ x_j^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_j & r_{T+1}^c \tilde{r}_j \\ r_{T+1}^c \tilde{r}_j^T & r_{T+1}^c \tilde{r}_j^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x_j^c \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\rho + \theta)^2 \\ \text{s.a.} \quad & e^T x_0 + x_0^c = 1 \\ & e^T x_j + x_j^c = r_j^T x_i + r_t^c x_i^c, \quad \forall j \\ & \sum_j \tilde{r}_j^T x_j + \tilde{r}_j^c x_j^c = \rho + \theta, \quad \theta \geq 0 \end{aligned}$$

**12.** Modelo de Markowitz multiperíódico com conta bancária e perdas:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_j \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_j \\ x_j^c \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_j & r_{T+1}^c \tilde{r}_j \\ r_{T+1}^c \tilde{r}_j^T & r_{T+1}^c \tilde{r}_j^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ x_j^c \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\rho^2 \\ \text{s.a.} \quad & e^T x_0 + x_0^c + x_0^l = 1, \quad x_0^l \geq 0 \\ & e^T x_j + x_j^c + x_j^l = r_j^T x_i + r_t^c x_i^c, \quad \forall j, \quad x_j^l \geq 0 \\ & \sum_j \tilde{r}_j^T x_j + \tilde{r}_j^c x_j^c = \rho \end{aligned}$$

**13.** Incluindo activos de perda nas folhas e escrevendo o problema com retornos de cenário,  $\rho_j$ , como variáveis adicionais obtém-se o modelo:

$$\begin{aligned} \min_{x, \{p_j\}} \quad & \sum_j \frac{1}{2} p_j [\Sigma_j x_j^2 + \rho_j^2] - \frac{1}{2}\rho^2 \\ \text{s.a.} \quad & \rho_j = \bar{r}_j x_j + r_2^c x_j^c, \quad \forall j \\ & x_o + x_0^c = 1 \\ & x_j + x_j^c + x_j^l = r_j x_0 + r_1^c x_0^c, \quad x_j^l \geq 0 \quad \forall j \\ & \sum_j p_j \rho_j = \rho \end{aligned}$$

## A.2 Instruções LINGO

Seguem-se os comandos para a aplicação dos modelos de Markowitz e Konno, no LINGO.

**Para o modelo de Markowitz**

```
MODEL:
SETS:
C/1..17/: media ,X;
PAIRS(C,C): Covariancia;
ENDSETS
MIN=@SUM(PAIRS(I , J):X(I)*X(J)*Covariancia(I , J))/2; ! funcao objectivo;
@SUM(C:X) = 1; ! soma das percentagens = 1;
```

```

@SUM(C:X*media) >= rho; ! retorno desejado;
DATA:
rho=0.001;
Covariancia , media = @OLE('caminho_para_ficheiro_EXCEL ',
'nome_das_celulas_covariancia ', 'nome_das_celulas_media ');
ENDDATA
END

```

#### **Para o modelo de Konno**

```

MODEL:
SETS:
PERIODOS/1..6/: Y; ! 6 periodos
INVESTIMENTOS/1..4/: X,media; 4 empresas
DESVIOS(PERIODOS,INVESTIMENTOS): ajt;
ENDSETS

MIN=@SUM(PERIODOS:Y)/np; ! funcao objectivo;
@FOR(PERIODOS(I):
Y+@SUM(DESVIOS(I,J): ajt*X(J))>=0);
@FOR(PERIODOS(I):
Y-@SUM(DESVIOS(I,J): ajt*X(J))>=0);
@SUM(INVESTIMENTOS:media*X) >= rho*M0;
@SUM(INVESTIMENTOS:X) = M0;

```

```

DATA:
rho=0.005; ! retorno pretendido
np=6; ! numero de periodos
M0=10000; ! montante inicial
ajt , media = @OLE('caminho_para_o_ficheiro_EXCEL ', 'nome_das_celulas_ajt ',
'nome_das_celulas_media ');
ENDDATA
END

```

#### **Para o modelo de Bertsimas e Sim**

```

MODEL:
SETS:
INVESTIMENTOS/1..7/: X,media ,dp;
ENDSETS

MAX=@SUM(INVESTIMENTOS:media*X)-Phi*@SUM(INVESTIMENTOS:(dp*X)^2); !objectivo;
@SUM(INVESTIMENTOS:X)=1;

DATA:
Phi = 10;
media ,dp = @OLE('caminho_para_o_ficheiro_EXCEL ', 'nome_das_celulas_media ',
'nome_das_celulas_dp ');
ENDDATA

```

END

MODEL:

SETS:

INVESTIMENTOS / 1..7 / : X, dp, Zj ;

ENDSETS

MAX = @SUM(INVESTIMENTOS: dp\*X\*Zj );

@SUM(INVESTIMENTOS: Zj)<=GAMMA;

@FOR(INVESTIMENTOS( I ):

Zj ( I )>=0);

@FOR(INVESTIMENTOS( I ):

Zj ( I )<=1);

DATA:

GAMMA = 6.5;

dp = @OLE( ' caminho\_para\_o\_ficheiro\_EXCEL ', ' nome\_das\_celulas\_dp ');

ENDDATA

END

**Deste sai  $\beta = \beta(\mathbf{x}^*, \Gamma)$  e substitui em baixo**

MODEL:

SETS:

INVESTIMENTOS / 1..7 / : Xz;

ENDSETS

MAX = Z;

Z - @SUM(INVESTIMENTOS: media\*Xz) <= -beta;

@SUM(INVESTIMENTOS: XZ) = 1;

@FOR(INVESTIMENTOS( I ):

Xz( I ) >=0);

DATA:

media = @OLE( ' caminho\_para\_o\_ficheiro\_EXCEL ', ' nome\_das\_celulas\_media ');

ENDDATA

END

### A.3 Instruções Matlab

Aqui estão exemplos *scripts* usados para resolver os modelos de Markowitz, Konno, Markowitz robusto e Bertsimas.

#### Modelo de Markowitz

```
retornos = xlsread( 'nome_do_ficheiro_EXCEL', numero_da_folha ,  
    'intervalo de celulas');
```

```

[p, n] = size(retornos);
Covariancia = cov(retornos);
media = zeros(1,n);
for i=1:n
    media(i) = mean(retornos(1:end,i:i));
end

rho = 0.00001;

f = zeros(n,1);
A = -media;
Aeq = ones(1,n);
b = -rho;
beq = 1;
lb = f;
ub = [];
[x,fval] = quadprog(Covariancia,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
retorno = media*x

```

### **Modelo de Konno**

```

ajt = xlsread('nome_do_ficheiro_EXCEL',numero da folha,
'intervalo de celulas');

```

```

[T,J] = size(ajt);
rj = zeros(1,J);
for i = 1:J
    rj(i) = mean(ajt(1:end,i:i));
end

```

```

rho = 0.00001;
M = 10000;
%coeficients da funcao objetivo
f = [ones(1,T) zeros(1,J)];
%matriz A das desigualdades
A = [-1*eye(T) -ajt; -1*eye(T) ajt; zeros(1,T) -rj];
b = [zeros(2*T,1); -rho*M]; %b das desigualdades
Aeq = [zeros(1,T) ones(1,J)]; %matriz A das igualdades
beq = M; %b das igualdades
lb = zeros(J+T,1);

```

```

[x, fval]=linprog(f/T,A,b,Aeq,beq,lb,[])
carteira = x(T+1:T+J)

```

### **Para o modelo de Markowitz robusto**

```

retornos = xlsread('nome_do_ficheiro-EXCEL',numero da folha,
'intervalo de celulas');
[p,n] = size(retornos);

```

```

m = 1; % numero de factores

wtil = 0.84;
cmwtil = finv(wtil,m,p-m-1);

rho = 0.00001; %retorno pretendido

% calculo da media dos retornos de cada activo
muemp = zeros(1,n);
for i=1:n
    muemp(i) = mean(retornos(1:end,i:i));
end

f = xlsread('nome_do_ficheiro_EXCEL',numero da folha,'intervalo de celulas');

%pd.f = fitdist(f,'Normal'); ajusta uma distribuicao ao retornos em f
F = 0.018^2; % variancia da distribuicao normal de f
%V0 = ones(1,n); estimador dos pesos dos factores do mercado (1 x 3)
B = f' ; % matriz dos retornos dos factores em cada per odo

A = [ones(p,1) B'];
AtA = A'*A;
iAtA = inv(AtA);

% valores de xbarra um para cada activo/empresa
xbarra = zeros(m+1,1,n);
for i=1:n
    xbarra(:, :, i)=iAtA*A'*retornos(1:end,i:i);
end

% Calculo do s^2
s2 = zeros(n,1);
for i=1:n
    s2(i) = (1/(p-m-1))*norm(retornos(1:end,i:i)-A*xbarra(:, :, i))^2;
end

%V0 estimador de V
V0 = zeros(1,n);
for i=1:n
    V0(i) = xbarra(2*i);
end

```

```

G = B*B'-(1/p)*(B*ones(p,1))*(B*ones(p,1))'; % matriz tal que...
H = G^(-1/2)*F*G^(-1/2); % H = G^(-1/2)*F*G^(-1/2)
[Q,Lambda] = eig(H); % diag(valores propios de H)+ matriz tal Q'*Lambda*Q
w = Q'*H^(1/2)*G^(1/2)*V0; %W = Q'*G*F*V0*x

% calculo dos alphas
alpha = zeros(1,n);
for i = 1:n
    alpha(i) = sqrt(m*cmwtil*s2(i));
end

%calculo de gamma
Gamma = zeros(1,n);
for i = 1:n
    Gamma(i) = sqrt(iAtA(1,1)*cmwtil*s2(i));
end

%mu0 estimador de mu-emp
mu0 = zeros(1,n);
for i=1:n
    mu0(i) = xbarra(2*i-1);
end

D = 0.1*diag(diag(V0'*F*V0)); % sugerido no artigo

%formulacao do modelo

sdpvar nu delta x(n,1) Psi(n,1) sigma tau t
% cones
R = [cone([2*sqrt(D)*x;1-delta],1+delta):'Cone1']; %(1)
R = [R, cone([2*alpha*Psi;sigma-tau],sigma+tau):'Cone2']; %(2)
R = [R, cone([2*w*x;1-sigma*Lambda-t],1-sigma*Lambda+t):'Cone3']; %(3)
R = [R, (mu0*x - Gamma*Psi >= rho):'retorno']; %(4)
R = [R, -x(1)+Psi(1)>=0];
R = [R, -x(2)+Psi(2)>=0];
R = [R, -x(3)+Psi(3)>=0];
R = [R, -x(4)+Psi(4)>=0];
R = [R, -x(5)+Psi(5)>=0];
R = [R, -x(6)+Psi(6)>=0];
R = [R, -x(7)+Psi(7)>=0];
R = [R, x(1)+Psi(1)>=0];
R = [R, x(2)+Psi(2)>=0];
R = [R, x(3)+Psi(3)>=0];
R = [R, x(4)+Psi(4)>=0];

```

```

R = [R, x(5)+Psi(5)>=0];
R = [R, x(6)+Psi(6)>=0];
R = [R, x(7)+Psi(7)>=0];
R = [R, (sum(x) == 1):'Capital ']; %(7)
R = [R, (0 <= sigma <= 1/Lambda):'sigma ']; %(8)
R = [R, [tau+t <= nu, tau>=0]:'tau ']; %(9)
R = [R, (x>=0):'noshort ']; % x>=0

% objetivo
objetivo = nu+delta;

% resolver
sol = solvesdp(R, objetivo)
min = double(nu+delta)
solucao = [double(nu);double(delta);double(x);double(Psi);double(sigma);
double(tau);double(t)]
carteira = double(x)
retorno = double(mu0*carteira)

Para o modelo de Bertsimas e Sim

retornos = xlsread('nome_do_ficheiro_EXCEL',numero da folha,
'intervalos de celulas');

[t,n]=size(retornos);

% resolver o problema quadratico original
Phi = 10; % maior que 0

%valor esperado dos retornos
p = zeros(1,n);
for i=1:n
    p(i) = mean(retornos(1:end,i:i));
end
%desvio-padrao dos retornos
sigma = zeros(1,n);
for i =1:n
    sigma(i)=std(retornos(1:end,i:i));
end

% resolve o problema original
H = Phi*diag(sigma.^2);
f = -p;
A = []; % matriz das restricoes de desigualdade
b = []; % b das desigualdades
Aeq = ones(1,n); % matriz das igualdades

```



```

beq = 1; % b das igualdades
lb = zeros(1,n); %limite inferior
ub = []; % limite superior
x_ast=quadprog(H,f,A,b,Aeq,beq,lb,ub);

% encontra beta(x,GAMMA)

% n de variaveis sujeitas a incerteza
J=n;

% GAMMA um valor em [0,J]
GAMMA = 6.5;

% calculo de beta = beta(x,GAMMA)
c = -sigma(1:1,1:J).*(x_ast(1:J,1:1)');
Abeta = [ones(1,J); -eye(J); eye(J)];
bbeta = [GAMMA; zeros(J,1); ones(J,1)];
[zj,beta] = linprog(c,Abeta,bbeta);

% resolucao do modelo de bertsimas aplicado a carteiras

z = [-1 zeros(1,n)];
Ax = [zeros(n,1) -eye(n)];
bx = zeros(n,1);
Az = [1 -p; Ax];
bz = [-beta; bx];
Aeqz = [0 ones(1,n)];
beqz = 1;
[x,zval] = linprog(z,Az,bz,Aeqz,beqz)

```

## A.4 Excerto dos Dados Usados

Abaixo, está um excerto dos dados utilizados referentes aos retornos à sexta-feira do ano de 2015.

Tabela 1: Retornos dos primeiros nove meses de 2015, à sexta-feira

6a	EDP	JMT	NBA	NOS	PTI	RED	SNC	PSI ret
02/01/2015	0,014295	-0,0114	0,004525	0	-0,00971	0	0,158621	-0,03134
09/01/2015	-0,0183	-0,01976	0,013393	0,014317	-0,01274	0	-0,01361	0,004003
16/01/2015	0,007405	0,02171	0,022222	0,001832	0	-0,72368	0,028902	0,008209
23/01/2015	0,008236	-0,00488	-0,01778	0,02039	0,017647	0	0	0,011214
30/01/2015	-0,04388	-0,03367	0,008969	0,010394	-0,00829	0	0,020942	0,013371
06/02/2015	-0,00919	0,000489	-0,00858	-0,01071	0,00545	0	0,016043	-0,00834
13/02/2015	0,000309	-0,00082	-0,01681	0,016527	-0,00535	0	0,025773	0,000433
20/02/2015	0,023077	0	0	-0,00932	0,005435	0	0	0,00449
27/02/2015	0,015846	0,00715	0	-0,01069	0,012853	0	0,014851	-0,00749
06/03/2015	-0,02924	0,013539	-0,00402	0,011094	0,007614	0	0,034826	7,03E-05
13/03/2015	0,01086	0,015945	-0,01976	0,00896	0,007229	0	-0,00926	0,008364
20/03/2015	0,009949	0,023364	-0,00418	0,002462	0,019417	0	0,009346	0,00309
27/03/2015	-0,00056	0,019531	-0,02128	0,007156	0,012077	0	0	0,00066
02/04/2015	0,004	0,006667	0	0,004558	0	0	-0,00472	0,00956
10/04/2015	-0,00431	0,02351	-0,01702	-0,00522	-0,00641	0	-0,00474	0,000805
17/04/2015	-0,0069	-0,01131	-0,00417	-0,0263	-0,01007	0	-0,01501	0,006613
24/04/2015	0,014188	0,031692	0,054167	-0,01622	0,013528	0	0,007889	0,015603
30/04/2015	0,016795	0,070255	-0,04509	0,007752	-0,00884	0	0,030588	0,017797
08/05/2015	0,03959	0,008567	0,004167	0,03393	-0,0746	0	0,023546	0,006111
15/05/2015	-0,00587	-0,00192	0	-0,00356	-0,00202	0	-0,00446	-0,00233
22/05/2015	-0,00277	0,001146	0,011905	-0,0034	0,003948	0	0,006912	-0,0183
29/05/2015	-0,00559	-0,01534	-0,00348	-0,00547	-0,02756	0	0,002299	-0,00034
05/06/2015	-0,01853	-0,00766	-0,00314	-0,00582	-0,01654	0	0	-0,02666
12/06/2015	-0,00817	0,00081	0,01432	-0,01265	-0,0226	0	-0,02266	-0,02327
19/06/2015	0,00444	-0,00746	-0,00398	0,019082	0,025111	0	0,044776	0,021761
26/06/2015	-0,00197	0,019892	0,011952	-0,00055	0,007555	0	0,014151	-0,05217
03/07/2015	-0,00488	-0,01869	-0,00592	-0,01237	0,005464	0	-0,02235	-0,03809
10/07/2015	0,025397	0,019383	0,016667	0,025787	-0,00272	0	0,011628	0,018007
17/07/2015	-0,00358	0,000841	-0,0012	-0,0053	0,021448	0	0,01856	0,000181
24/07/2015	0,005018	-0,0032	0,004202	-0,00444	-0,00761	-0,03509	-0,00179	-0,01963
31/07/2015	-0,03881	0,03125	0,016393	0,000259	0	0	0,003066	0,005406
07/08/2015	-0,00323	0,007156	0,011789	-0,0094	-0,00719	0	0	0,005192
14/08/2015	-0,00477	0,031475	0	0,001063	0,002375	0	-0,00442	0,008108
21/08/2015	-0,04262	-0,0417	-0,02019	-0,00415	0,002404	0	-0,00184	-0,05803
28/08/2015	0,000318	-0,01765	-0,02009	-0,012	0,028571	0	0,002304	-0,00474
04/09/2015	-0,01447	-0,01815	0,017727	-0,00141	-0,0154	0	-0,00141	-0,00541
11/09/2015	-0,00327	0,009824	-0,01267	-0,01178	-0,01335	0	0	-0,00592
18/09/2015	-0,01032	0,000414	-0,00395	-0,01082	-0,00884	0	0,030675	0,011712
25/09/2015	0,039042	0,034959	0	0,030405	-0,0746	0	0,041271	-0,01844

Tabela 2: Retornos dos últimos três meses de 2015, à sexta-feira								
	EDP	JMT	NBA	NOS	PTI	RED	SNC	PSI ret
02/10/2015	0,018914	0,017198	0,006871	0,00614	-0,00202		0 -0,00274	0,034715
09/10/2015	0,010405	-0,01458	0,028531	-0,00299	0,003948		0 0,006977	-0,03048
16/10/2015	0,007111	0,018623	0,004505	-0,00056	-0,02756		0 -0,01643	0,000848
23/10/2015	0,008274	0,000779	0	0,024363	-0,01654		0 0,005766	-0,00213
30/10/2015	0,003277	0,001959	-0,00536	-0,00053	-0,0226	-0,18182	0,002342	0,00696
06/11/2015	-0,00728	0,00989	-0,00604	-0,01181	0,025111		0 0,002364	-0,0405
13/11/2015	0,009579	-0,0121	0,017778	-0,00818	0,007555		0 0,01381	0,007278
20/11/2015	0,012158	0,00425	0,000874	0,008531	-0,00826		0 -0,00047	-0,0019
27/11/2015	0,002477	-0,00039	0	0,002983	0,013467		0 0,000931	-0,00189
04/12/2015	-0,00768	-0,0136	-0,00131	-0,00774	-0,01074		0 -0,00419	-0,00102
11/12/2015	-0,01471	-0,03003	-0,00845	-0,01346	-0,01107		0 -0,01402	-0,01244
24/12/2015	0,004984	-0,00167	-0,02232	0,002318	0,007377		0 -0,02142	-0,01017
31/12/2015	0,007279	-0,00786	-0,0172	-0,00726	-0,0398		0 0	0,000119

## A.5 Outros Resultados da Aplicação Computacional

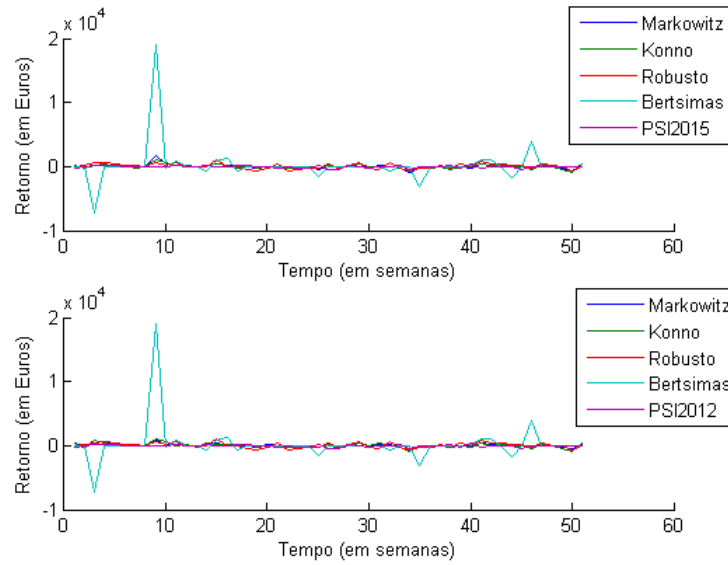


Figura 6: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012 em 2015.

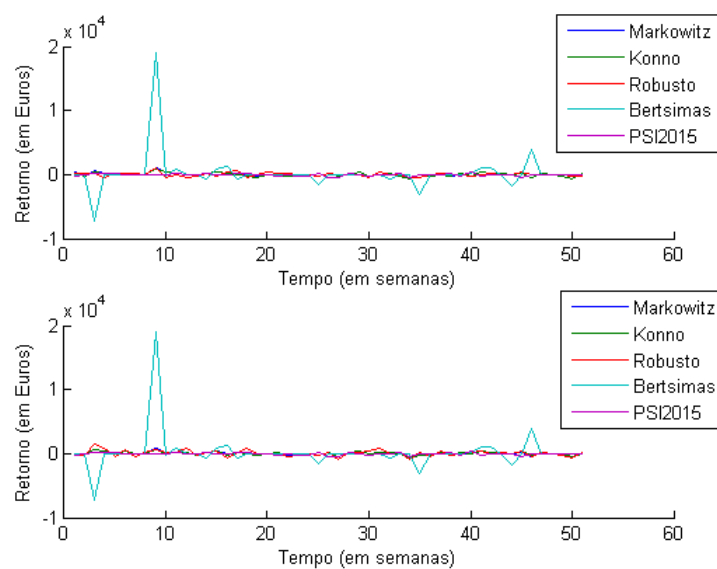


Figura 7: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011 em 2015.

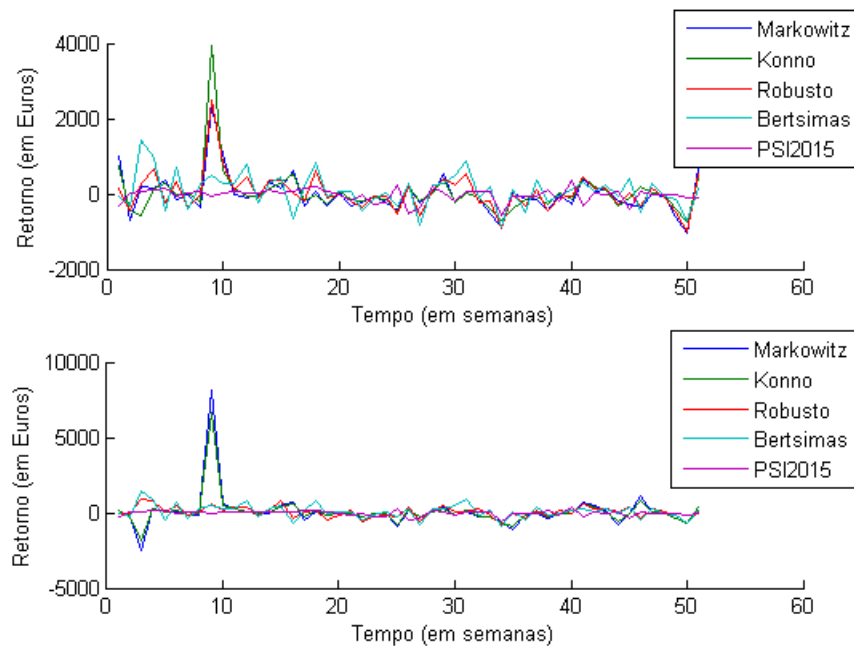


Figura 8: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010 em 2015.

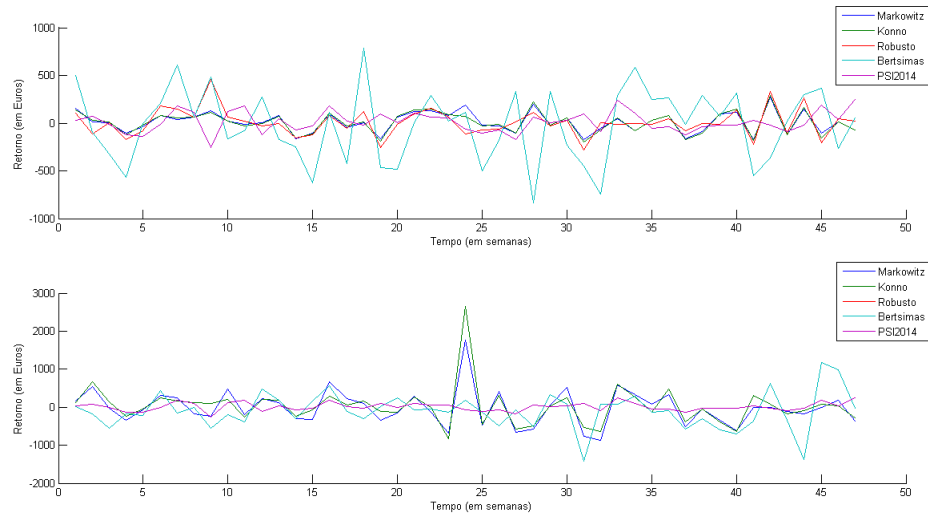


Figura 9: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2013 em 2014.

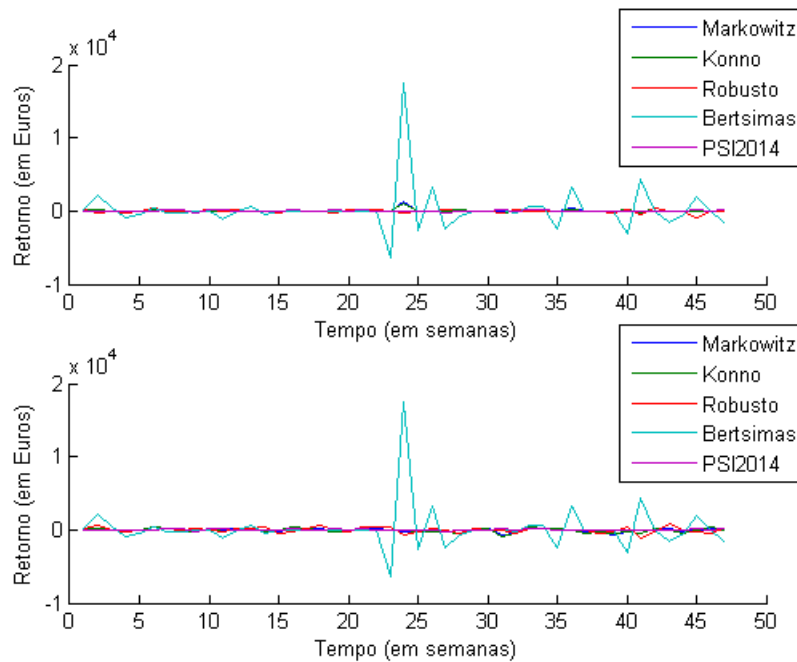


Figura 10: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012 em 2014.

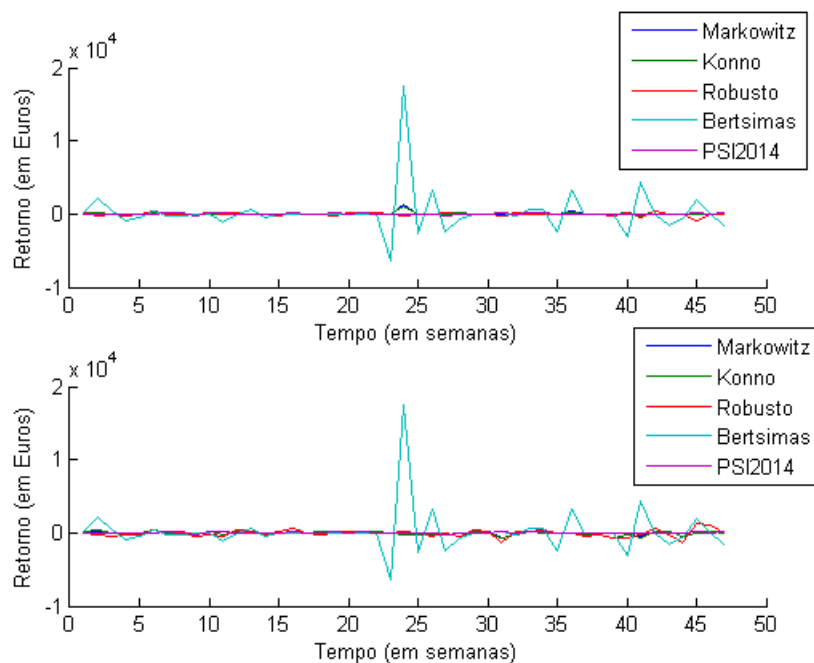


Figura 11: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011 em 2014.

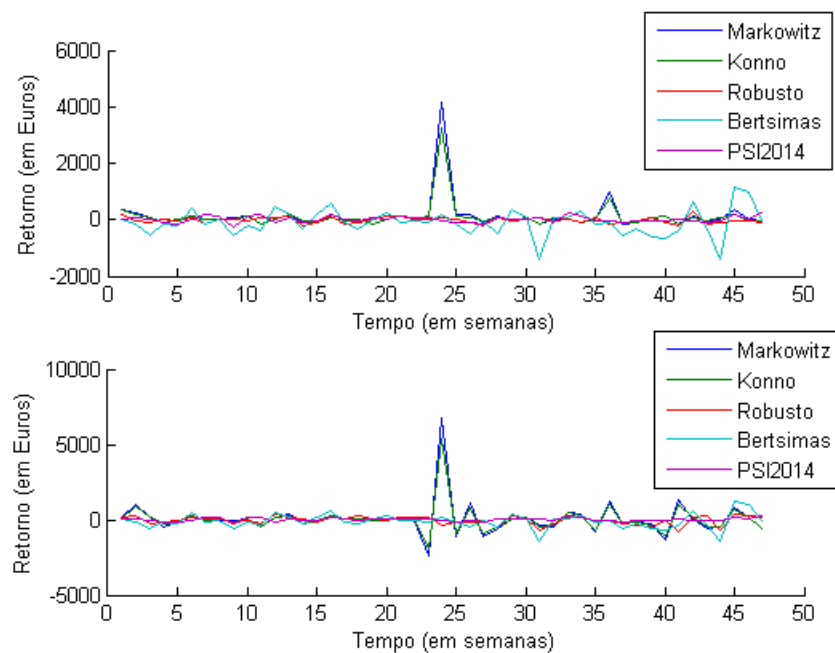


Figura 12: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010 em 2014.

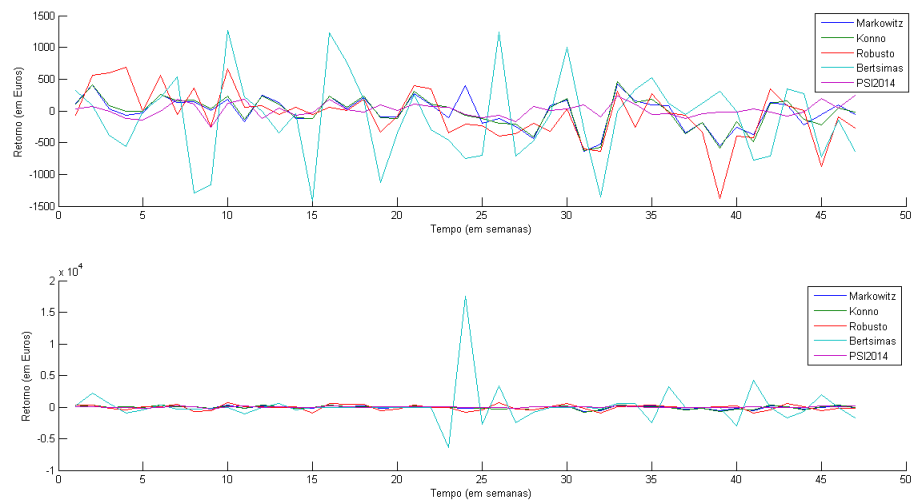


Figura 13: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012/2013 em 2014.

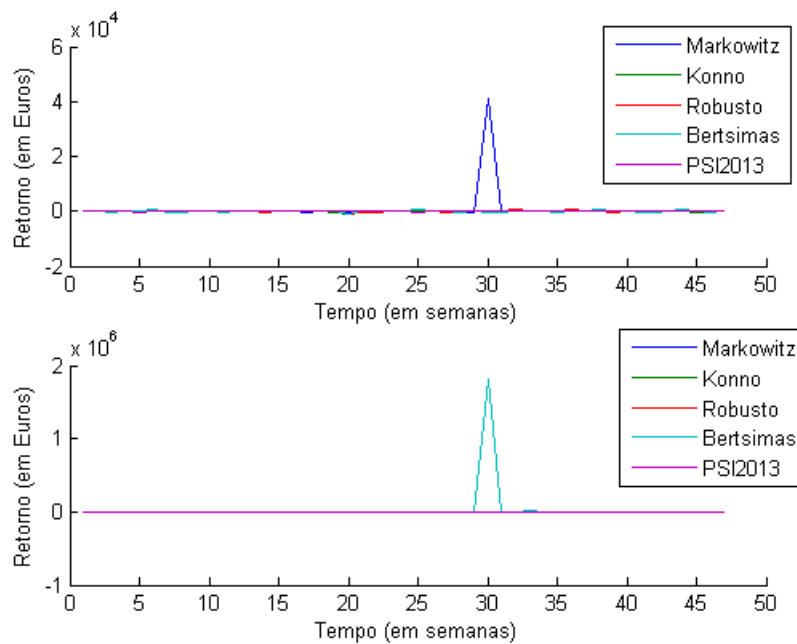


Figura 14: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2012 em 2013.

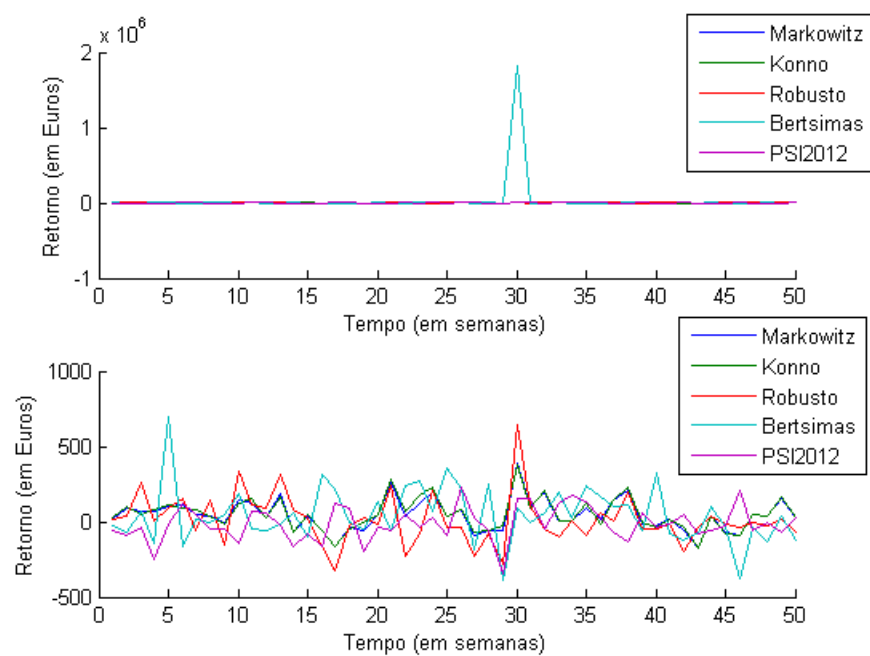


Figura 15: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011 em 2012.

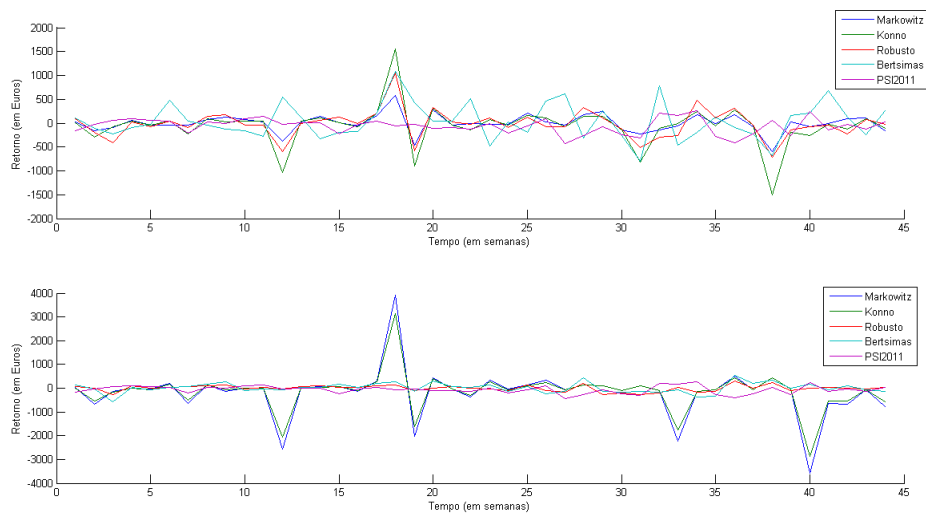


Figura 16: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010 em 2011.



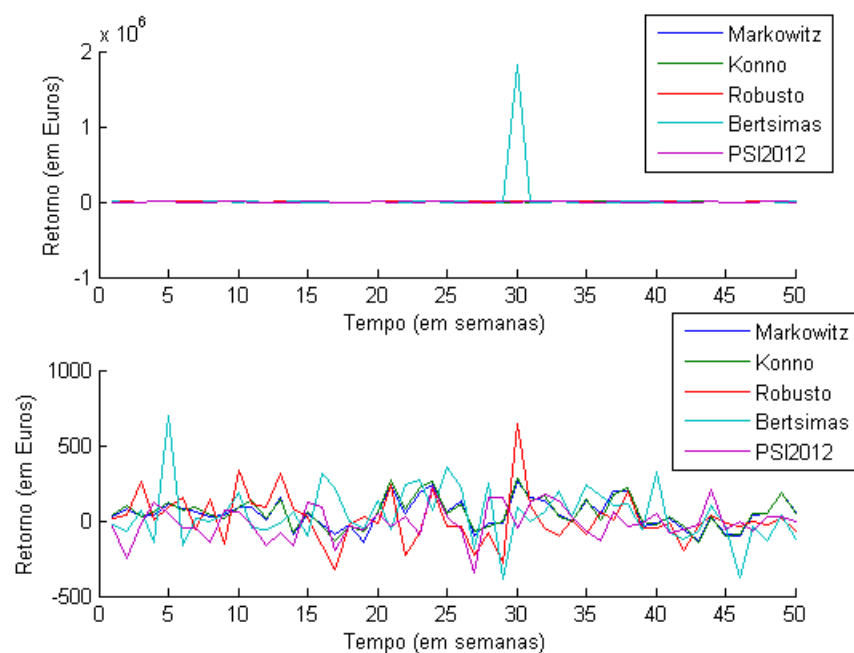


Figura 17: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2010/2011 em 2012.

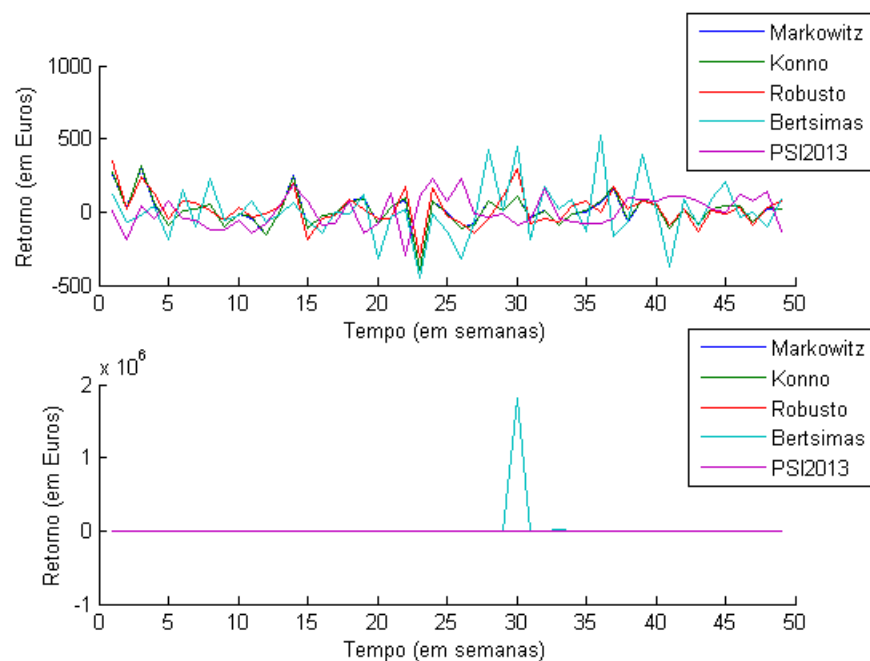


Figura 18: Retornos das carteiras obtidas com os dados diários e semanais (sexta-feiras) de 2011/2012 em 2013.